

**BERECHNUNG DES
NEUTRON-DEUTERON-
AUFBRUCHWIRKUNGSQUERSCHNITTES
UNTER EINSCHLUSS
EINES DREINUKLEONENPOTENTIALS**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Physik
und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WOLFGANG MEIER

aus Eberswalde

Bochum 1983

Dissertation eingereicht am 4.7.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 20.7.1983

Referent: Prof. Dr. W. Glöckle

Korreferent: Prof. Dr. D. Kamke

Inhalt

1.	Einleitung	4
2.	Grundlagen der Drei-Teilchen-Theorie	8
2.1	Jacobi-Koordinaten	8
2.2	Hamiltonoperatoren und Kanalzustände	11
2.3	Spin und Isospin im Drei-Nukleonen-System	16
3.	Zweinukleonenpotential	21
3.1	Separable Potentiale vom Range 1	22
3.2	Yamaguchi-Potential	27
3.3	Konstruktion separabler Potentiale durch unitäre Pol-Approximation	31
3.4	UPA zum Malfliet-Tjon-Potential	35
4.	Dreinukleonenpotential	39
4.1	Spin-Isospin-Mittelung des Dreinukleonen- potentials	39
4.2	Partialwellenentwicklung des Dreinukleonen- potentials	44
4.3	Durchführung der Winkelintegrationen	50
5.	Faddeev-Gleichungen mit Dreinukleonenpoten- tialen	57
5.1	Verallgemeinerung der Faddeev-Gleichungen für Dreinukleonenpotentiale	57
5.2	Faddeev-Gleichungen für identische Teilchen	61
5.3	Faddeev-Gleichungen für separables Zwei- nukleonenpotential	66

5.4	Born-Term zum Zweinukleonenpotential	71
5.5	Dreinukleonenpotential in den Faddeev-Gleichungen	77
5.6	Zwei-Teilchen-T-Matrix in den Faddeev-Gleichungen	82
5.7	Homogene Faddeev-Gleichungen	84
6.	Aufbruchwirkungsquerschnitt und Kinematik	85
6.1	Herleitung des Aufbruchwirkungsquerschnittes	86
6.2	Phasenraumfaktor und kinematische Kurven	91
6.3	Spezielle Konfigurationen im Phasenraum	95
7.	Numerische Verfahren	112
7.1	Zwei-Nukleonen-Gleichungen	112
7.2	Berechnung des Dreinukleonenpotentials	115
7.3	Berechnung der permutierten Anteile des Dreinukleonenpotentials	118
7.4	Berechnung der Anteile zum Born-Term	121
7.5	Numerisches Verfahren zur Lösung der Faddeev-Gleichungen	124
7.6	Berechnung der Tritonbindungsenergie	131
8.	Faddeev-Rechnungen unterhalb der Aufbruchschwelle	132
8.1	Tritonbindungsenergie	132
8.2	Neutron-Deuteron-Dublett-Streulänge	135
9.	Ergebnisse für Aufbruchwirkungsquerschnitte	139
9.1	Konvergenz der Partialwellenentwicklung der Amplituden	140
9.2	Aufbruchquerschnitt für FSI	144

9.3	Aufbruchquerschnitte für QFS	156
9.4	Wirkungsquerschnitte zur kollinearen Konfiguration	160
9.5	Wirkungsquerschnitte für Sternkonfigurationen	164
10.	Zusammenfassung	174
Anhang A	Partialwellenentwicklung der zyklischen Permutationen	178
Anhang B	Berechnung von Spin-Isospin-Matrixelementen des gemittelten Dreinukleonenpotentials	183
Anhang C	Integral über gekoppelte Kugelfunktionen	186
	Literaturverzeichnis	188

1. Einleitung

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Wenig-Teilchen-Theorie ist das Drei-Nukleonen-System. Ein Problem stellt sich bei der Behandlung solcher Systeme: Es gibt keine theoretisch fundierte Form für die Potentiale, die in nicht-relativistischen Systemen zwischen den Nukleonen wirken. Ein solches Potential müßte im Rahmen der Quantenchromodynamik aus der Quark-Quark-Wechselwirkung, die durch die Gluonen als Wechselwirkungsquanten übertragen wird, abgeleitet werden. Ein solcher Weg ist bis jetzt noch nicht beschritten worden: Man ist daher auf Zweinukleonenpotentiale angewiesen, die wie zum Beispiel das Reid-Potential [Rei 68] rein phänomenologisch oder wie das Bonner Potential [Hol 81] aus dem Ein-Bosonen-Austausch gewonnen worden sind. Diese Potentiale geben die experimentellen Daten des Zwei-Nukleonen-Systemes sehr gut wieder. Durch Vergleich der experimentellen Daten des Drei-Nukleonen-Systemes (Tritonbindungsenergie, Wirkungsquerschnitte der Nukleon-Deuteron-Reaktionen) mit den aus der Theorie abgeleiteten ist es möglich zu entscheiden, ob die benutzten Potentiale auch dann noch das richtige Verhalten zeigen. Dabei wird vorausgesetzt, daß man mit der Schrödinger-Gleichung und den daraus abgeleiteten Faddeev-Gleichungen [Fad 64] das geeignete Mittel zur Beschreibung solcher Systeme hat.

Es zeigt sich jedoch, daß allein mit den sogenannten realistischen Potentialen (Reid-Potential, Bonner Potential und andere) für die Tritonbindungsenergie keine Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert zu erreichen ist: Die Ergebnisse weichen um mehr als 1 MeV von dem experimentellen Wert, der -8,48 MeV beträgt, ab [Haj 81].

Für diesen relativ großen Unterschied zwischen Theorie und Experiment gibt es bis jetzt noch keine befriedigende Erklärung. Weder bringen relativistische Effekte die notwendige zusätzliche Bindungsenergie [Mül 81], noch ist es möglich, dies durch Variation des off-shell-Verhaltens der Potentiale [Bra 74], das nicht aus Zwei-Nukleonen-Prozessen ableitbar ist, zu erreichen. Einzig die Berücksichtigung eines Dreinukleonenpotentials scheint zur Zeit die bestehende Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment aufzuheben [Coo 79, Glö 82].

Um diese These zu untermauern, ist es notwendig, das Dreinukleonenpotential nicht nur im gebundenen System, dem Triton, zu betrachten, sondern es müssen auch die Reaktionen, an denen drei Nukleonen beteiligt sind, untersucht werden, weil dafür wegen der großen Fülle unterschiedlicher Konfigurationen die Möglichkeit besteht, daß es dabei Größen gibt, die empfindlich auf ein Dreinukleonenpotential reagieren.

Da sich die Faddeev-Theorie für langreichweitige Potentiale nur schwierig anwenden läßt, sollen die Drei-Nukleonen-Systeme mit mehr als einem Proton nicht betrachtet werden, weil die Effekte des Coulomb-Potentiales in derselben Größenordnung wie die des Dreinukleonenpotentials sein können und somit von diesen nicht zu trennen sind. Es ist also zweckmäßig, die Reaktionen des Neutron-Deuteron-Systemes zu untersuchen. Dabei muß man als Nachteil in Kauf nehmen, daß dabei im Gegensatz zur Proton-Deuteron-Streuung die Zählraten im Experiment sehr gering sind, was große statistische Fehler bei den gemessenen Wirkungsquerschnitten zur Folge hat. Dies macht sich besonders bei sogenannten vollständigen

Experimenten zum Neutron-Deuteron-Aufbruch bemerkbar, bei denen im Endkanal zwei Nukleonen in Koinzidenz gemessen werden müssen, damit man die vollständige kinematische Information für alle drei Nukleonen des Endkanales erhält. Aus diesem Grunde sind Experimente, in denen Aufbruchreaktionen mit polarisierten Teilchen studiert werden, wegen zu großer Fehlerbalken noch schwieriger durchzuführen, obwohl gerade Polarisationsdaten zu Aufbruchreaktionen empfindlich auf ein Dreinukleonenpotential reagieren könnte. In dieser Arbeit sollen daher nur die Wirkungsquerschnitte zu Aufbruchreaktionen mit unpolarisierten Teilchen bestimmt werden. Da dies die erste Rechnung ist, in der Effekte des Dreinukleonenpotentials beim n-d-Aufbruch studiert werden sollen, ist man gezwungen, das Problem zu vereinfachen, um überhaupt einen gangbaren Weg zu finden. Daher müssen sowohl für das Zwei- wie auch für das Dreinukleonenpotential gewisse Näherungen vorgenommen werden. Wie realistisch diese Näherungen sind, kann letztlich nur der Vergleich zu Rechnungen mit besseren Potentialen erweisen. Mit dem in dieser Arbeit benutzten Modell können daher nur Tendenzen aufgezeigt werden, die ein Dreinukleonenpotential bewirkt.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich, wie in dieser Arbeit vorgegangen werden muß. Im zweiten Kapitel werden die notwendigen Grundlagen der Drei-Teilchen-Theorie gebracht, und es wird die Notation zur Beschreibung der Drei-Nukleonen-Systeme festgelegt. In den beiden folgenden Kapiteln werden das Zweinukleonenpotential, für das eine separable Form angenommen werden soll, und das Dreinukleonenpotential vorgestellt, das durch Mittelung mit einem total-antisymmetrischen Spin-Isospin-Zustand aus einer durch Austausch

zweier Pionen gegebenen Wechselwirkung gewonnen wird. Im fünften Kapitel werden die Faddeev-Gleichungen für die Übergangsoperatoren und die daraus folgenden Integralgleichungen für die Übergangsamplituden, die die Dynamik der Reaktionen beschreiben, so verallgemeinert, daß ein Dreinukleonenpotential berücksichtigt werden kann. Der Zusammenhang des Wirkungsquerschnittes mit diesen Amplituden wird im sechsten Kapitel gegeben; weiterhin werden die kinematischen Konfigurationen beschrieben, die im einzelnen betrachtet werden sollen. Im siebten Kapitel werden die numerischen Verfahren, die für die Programmierung notwendig sind, vorgestellt und die Genauigkeit der Ergebnisse abgeschätzt. Die Resultate für Rechnungen zu Energien, die unterhalb der Aufbruchschwelle liegen, werden in Kapitel 8 gebracht. Danach werden die Effekte des Dreinukleonenpotentials auf die Aufbruchwirkungsquerschnitte zu vielen kinematischen Konfigurationen beschrieben und diskutiert. In der abschließenden Zusammenfassung soll ein Resumee dieser Arbeit gezogen werden.



2. Grundlagen der Drei-Teilchen-Theorie

In diesem Abschnitt wird die Notation eingeführt, die zur Beschreibung von Dreiteilchensystemen zweckmäßig ist. Dazu gehört die Wahl geeigneter Koordinaten. Mit diesen Koordinaten werden Basiszustände des Hilbertraumes der Dreiteilchenzustände definiert. Diese Basiszustände sind die Eigenzustände der Kanalhamiltonoperatoren.

2.1 Jacobi-Koordinaten

Da in dieser Arbeit das Drei-Nukleonen-System betrachtet werden soll und da Proton und Neutron als identische Teilchen, die sich durch ihre Isospinquantenzahl unterscheiden, aufgefaßt werden sollen, werden im folgenden alle Beziehungen für drei Teilchen gleicher Masse gegeben. Da die Masse immer nur in dem Ausdruck $\frac{\hbar^2}{m}$ auftritt, braucht nur diese Größe festgelegt zu werden. In dieser Arbeit wird mit $\frac{\hbar^2}{m} = 41,47 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2$ gerechnet. Wegen der Translationsinvarianz der Wechselwirkungen ist es sinnvoll, die drei Teilchen im Schwerpunktsystem zu beschreiben; die Abhängigkeit von der Schwerpunktsbewegung läßt sich dann abspalten, und man erhält so eine Reduzierung der Zahl der Koordinaten.

Ausgehend von den Ortsraumkoordinaten $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ im Laborsystem, werden die folgenden Vektoren definiert:

$$\vec{r}_1 = \vec{x}_1 - \vec{x}_3 \quad , \quad (2.1)$$

$$\vec{S}_1 = \vec{x}_1 - \frac{1}{2} (\vec{x}_2 + \vec{x}_3) \quad , \quad (2.2)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3). \quad (2.3)$$

Dies sind die Jacobi-Koordinaten im Ortsraum; diese haben die folgende Bedeutung: $\vec{r}_1$ beschreibt den Abstand der Teilchen im Zwei-Teilchen-Subsystem 2-3; $\vec{R}$ ist die Position des Schwerpunktes aller drei Teilchen, und $\vec{s}_1$ ist die Lage des Teilchens 1 bezogen auf den Schwerpunkt des Subsystems 2-3. Durch zyklisches Vertauschen der Indices erhält man weitere Jacobi-Koordinatensysteme $(\vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{R})$ und $(\vec{r}_3, \vec{s}_3, \vec{R})$.

Zu den Laborkoordinaten $\vec{x}_i$ sind die zugehörigen kanonisch-konjugierten Laborimpulse durch $\vec{k}_i = \frac{1}{i} \nabla_{\vec{x}_i}$ definiert. Genaugenommen sind die hier als Impulse bezeichneten Größen die Wellenzahlvektoren, die erst nach Multiplikation mit $\hbar$ die eigentlichen Impulse ergeben. Aus den Vektoren $\vec{k}_i$ folgen die zu $(\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{R})$ kanonisch-konjugierten Impulse $\vec{p}_1 = \frac{1}{i} \nabla_{\vec{r}_1}$, $\vec{q}_1 = \frac{1}{i} \nabla_{\vec{s}_1}$ und $\vec{P} = \frac{1}{i} \nabla_{\vec{R}}$:

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{2} (\vec{k}_2 - \vec{k}_3), \quad (2.4)$$

$$\vec{q}_1 = \frac{2}{3} \vec{k}_1 - \frac{1}{3} (\vec{k}_2 + \vec{k}_3), \quad (2.5)$$

$$\vec{P} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3. \quad (2.6)$$

Hier ist $\vec{p}_1$ der Relativimpuls im Subsystem 2-3, $\vec{P}$ der wegen der Translationsinvarianz erhaltene Gesamtimpuls des Drei-Teilchen-Systems und $\vec{q}_1$ der Relativimpuls des Teilchens 1 bezogen auf den Schwerpunkt des Subsystems 2-3. Wie im Ortsraum erhält man durch zyklisches Vertauschen weitere Jacobi-Impulse:

$(\vec{p}_2, \vec{q}_2, \vec{P})$ und $(\vec{p}_3, \vec{q}_3, \vec{P})$. Im Folgenden wird normaler-

weise immer das Jacobi-Koordinatensystem 1 mit $\vec{p}_1$, $\vec{q}_1$ und $\vec{P}$ benutzt. Wenn die Indices weggelassen sind, soll immer $\vec{p} = \vec{p}_1$ und $\vec{q} = \vec{q}_1$ gelten.

Es wird notwendig sein, zwischen den verschiedenen Jacobi-Koordinatensystemen umzurechnen; die notwendigen Formeln sind:

$$\vec{p}_1 = -\frac{1}{2} \vec{p}_2 + \frac{3}{4} \vec{q}_2 = -\frac{1}{2} \vec{p}_3 - \frac{3}{4} \vec{q}_3, \quad (2.7)$$

$$\vec{q}_1 = -\vec{p}_2 - \frac{1}{2} \vec{q}_2 = \vec{p}_3 - \frac{1}{2} \vec{q}_3. \quad (2.8)$$

Auch hier ergeben sich durch zyklisches Vertauschen die weiteren Relationen. Weiterhin werden die folgenden Gleichungen gebraucht, die sich aus (2.7) und (2.8) ergeben:

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{2} \vec{q}_1 + \vec{q}_2, \quad (2.9)$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{q}_1 - \frac{1}{2} \vec{q}_2. \quad (2.10)$$

Für die Impulse $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$ gilt: $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0$; die $\vec{q}_i$ sind daher die zu den Laborimpulsen $\vec{k}_i$ gehörenden Schwerpunktsimpulse, und aus (2.5) und (2.6) ergibt sich die Umrechnung zwischen den Impulsen im Labor- und Schwerpunktsystem:

$$\vec{k}_i = \vec{q}_i + \frac{1}{3} \vec{P}. \quad (2.11)$$

Wenn man das freie N-d-System betrachtet, ist ein weiterer Satz von Koordinaten sinnvoll. Es seien $\vec{k}_i$ und $\vec{p}_i$ die schon eingeführten Impulse, zu denen als dritter unabhängiger Vektor der Schwerpunktsimpuls $\vec{K}_i$ des Zwei-Teilchen-Subsystems genommen wird. Es sei also zum Beispiel:

$$\vec{K}_1 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (2.12)$$

Dann beschreibt also $\vec{k}_a$ die Bewegung des freien Nukleons, $\vec{K}_a$ die des Deuteronschwerpunkts und $\vec{p}_a$ die Relativbewegung der Nukleonen im Deuteron.

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt eingeführten Impulse lassen sich die Hamiltonoperatoren und Basiszustände, wie im nächsten Abschnitt zu zeigen ist, in einfacher Weise schreiben.

2.2 Hamiltonoperatoren und Kanalzustände

Die kinetische Energie eines freien Drei-Teilchen-Systems läßt sich mit den oben definierten Impulsen so ausdrücken:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{2} k_1^2 + \frac{1}{2} k_2^2 + \frac{1}{2} k_3^2 \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \left(p_1^2 + \frac{3}{4} q_1^2 \right) + \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{6} p^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2 + \frac{1}{2} q_3^2 \right) + \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{6} p^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{2} k_1^2 + p_1^2 + \frac{1}{4} k_2^2 \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dabei ist $\frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{6} p^2$ die Energie der Schwerpunktsbewegung. Der freie Hamiltonoperator hat somit die Form

$$h_0 = \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{2} \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right), \quad (2.14)$$

und seine Eigenzustände, die ebenen Wellen, lassen sich durch den Ket-Vektor

$$|\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3\rangle = |\vec{k}_1\rangle |\vec{k}_2\rangle |\vec{k}_3\rangle \quad (2.15)$$

darstellen; es gilt dann die Eigenwertgleichung

$$h_0 |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3\rangle = E_{\text{kin}} |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3\rangle. \quad (2.16)$$

Die Normierung der ebenen Wellen ist durch die Ortsraumdarstellung

$$\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3 | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2 + \vec{k}_3 \cdot \vec{x}_3)} \quad (2.17)$$

festgelegt. Die ebenen Wellen erfüllen die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation:

$$\langle \vec{k}_1' \vec{k}_2' \vec{k}_3' | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \rangle = \delta(\vec{k}_1' - \vec{k}_1) \delta(\vec{k}_2' - \vec{k}_2) \delta(\vec{k}_3' - \vec{k}_3), \quad (2.18)$$

$$\int |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \rangle \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | d^3(k_1 k_2 k_3) = 1. \quad (2.19)$$

In Jacobi-Koordinaten werden die ebenen Wellen so geschrieben:

$$|\vec{p} \vec{p} \vec{q}\rangle = \int \delta(\vec{p} - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)) \delta(\vec{p} - \frac{1}{2}(\vec{k}_2 - \vec{k}_3)) \delta(\vec{q} - (\frac{2}{3}\vec{k}_1 - \frac{1}{3}\vec{k}_2 - \frac{1}{3}\vec{k}_3)) \cdot |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3\rangle d^3(k_1 k_2 k_3) \quad (2.20)$$

Der Index am Ket-Vektor bezeichnet das Jacobi-Koordinatensystem, auf das sich die Impulse beziehen. Wenn dieser Index weggelassen ist, ist immer das System 1 gemeint.

Bei translationsinvarianten Operatoren A, für die also $[A, \vec{P}] = 0$ gilt, läßt sich die Abhängigkeit vom Gesamtimpuls so abseparieren:

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' | A | \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \langle \vec{p}' \vec{q}' | \hat{A} | \vec{p} \vec{q} \rangle. \quad (2.21)$$

Dabei ist $\hat{A}$ der Operator, der in dem Hilbertraum der reduzierten Schwerpunktszustände wirkt. Dieser Raum wird durch die Zustände

$|\vec{p} \vec{q}\rangle$ aufgespannt, die Eigenzustände zu $\hat{h}_0 = \frac{h^2}{m} (p^2 + \frac{3}{4} q^2)$, dem freien Hamiltonoperator im Schwerpunktsystem, sind. Für $|\vec{p} \vec{q}\rangle$ haben Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation die Form

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' | \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \delta(\vec{q}' - \vec{q}), \quad (2.22)$$

$$\int |\vec{p} \vec{q}\rangle \langle \vec{p} \vec{q}| d^3(pq) = \hat{1}. \quad (2.23)$$

Da in den nächsten Abschnitten immer nur im Schwerpunktsystem gearbeitet wird, lasse ich, da Mißverständnisse nicht möglich sind,

das Dach zur Unterscheidung der vollen Operatoren von denen im Schwerpunktsystem weg und schreibe statt (2.21):

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' | A | \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \langle \vec{p}' \vec{q}' | A | \vec{p} \vec{q} \rangle. \quad (2.24)$$

Bei Operatoren, die von der Gesamtenergie des Drei-Teilchen-Systems abhängen, ist aber noch zu beachten, daß beim Übergang zum Schwerpunktsystem die Energie der Schwerpunktsbewegung

$$\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{6} P^2$$

abzuziehen ist.

Um die Bewegung der Nukleonen vollständig zu beschreiben, muß man die Wechselwirkungen zwischen ihnen noch hinzunehmen. Im Drei-Nukleonen-System gibt es die drei Paarwechselwirkungen V_{12} , V_{13} und V_{23} und das Dreinukleonenpotential V_{123} , das, auch wenn es nicht richtig ist, oft Dreinukleonenkraft genannt wird. Dieses Dreinukleonenpotential hängt von den Koordinaten aller drei Nukleonen ab und läßt sich nicht als Summe von Termen schreiben, die jeweils nur von den Koordinaten zweier Nukleonen abhängen. Damit der Formalismus sich einfacher schreiben läßt, führe ich für die Paarwechselwirkungen die Notationen ein:

$$V_1 = V_{23}, \quad V_2 = V_{31}, \quad V_3 = V_{12}. \quad (2.25)$$

Das heißt, V_1 ist die Wechselwirkung im Subsystem 2-3, das daher auch als Subsystem 1 eindeutig bezeichnet werden kann. Für das Dreinukleonenpotential werde gesetzt:

$$V_4 = V_{123}. \quad (2.26)$$

Der volle Drei-Nukleonen-Hamiltonoperator hat also dann die Form

$$H = h_0 + V \quad (2.27)$$

mit

$$V = V_{23} + V_{31} + V_{12} + V_{123} = \sum_{i=1}^4 V_i, \quad (2.28)$$

wobei h_0 der schon eingeführte freie Hamiltonoperator ist.

Zu H gibt es im Falle des n - n - p -Systems nur einen gebundenen Zustand, das Triton:

$$H |\Psi_{\text{Trit}}\rangle = E_{\text{Trit}} |\Psi_{\text{Trit}}\rangle . \quad (2.29)$$

Die Streuzustände zu H lassen sich mit Hilfe der Kanalzustände darstellen, die Eigenzustände der Kanalhamiltonoperatoren sind. Diese Kanalhamiltonoperatoren enthalten neben h_0 höchstens eine Paarwechselwirkung:

$$h_\gamma = h_0 + V_\gamma , \quad \gamma = 0, 1, 2, 3 . \quad (2.30)$$

Dabei hat man die freie Bewegung mit $V_0=0$ als Kanal 0 hinzugenommen. Die Eigenzustände zu h_γ , die Kanalzustände, sind durch

$$h_\gamma |\phi_\gamma\rangle = E_\gamma |\phi_\gamma\rangle \quad (2.31)$$

gegeben. Diese Kanalzustände für $\gamma \neq 0$ beschreiben also die Bewegung des Nukleons und des Zwei-Nukleonen-Subsystems, das gebunden ist:

$$|\phi_\gamma\rangle = |\psi_{\gamma n} \bar{q}\rangle_\gamma ; \quad (2.32)$$

$$\text{für } \gamma=0 \text{ gilt } |\phi_0\rangle = |\bar{p} \bar{q}\rangle . \quad (2.33)$$

Die Kanalzustände sind diejenigen, die man in Streuexperimenten mit drei Nukleonen im Anfangs- bzw. Endkanal realisiert hat: ein freies Nukleon und ein Deuteron oder drei freie Nukleonen. Für $\gamma=0$ bilden die Kanalzustände $|\phi_0\rangle$, wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, eine vollständige Hilbertraumbasis. Für ein bestimmtes $\gamma \neq 0$ muß man zu $|\psi_{\gamma n} \bar{q}\rangle_\gamma$ noch die Zustände $|\psi_p^{(*)} \bar{q}\rangle_\gamma$ hinzunehmen, bei denen statt der Bindungszustände $|\psi_{\gamma n}\rangle$ die Zwei-Nukleonen-Streuzustände $|\psi_p^{(*)}\rangle$ stehen, die sich aus den

ebenen Wellen $|\vec{p}\rangle$ entwickeln, um ein vollständiges Basissystem zu erhalten.

Aus den Kanalzuständen werden analog zur Potentialstreuung mit Mølleroperatoren die Streuzustände zu H gebildet:

$$|\Psi_{\gamma}^{(\pm)}\rangle = \Omega_{\gamma}^{(\pm)} |\Phi_{\gamma}\rangle, \quad \gamma = 0, 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

mit

$$\Omega_{\gamma}^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{-\frac{i}{\hbar} h_{\gamma} t} \quad (2.35)$$

Eine bequemere Darstellung der Mølleroperatoren bekommt man mit den Resolventenoperatoren

$$G(z) = \frac{1}{z - H}, \quad (2.36)$$

$$g_{\gamma}(z) = \frac{1}{z - h_{\gamma}}. \quad (2.37)$$

Dabei darf z nicht zum Spektrum von H bzw. h_{γ} gehören. Analog zur Potentialstreuung erhält man [Sch 74]:

$$\Omega_{\gamma}^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon G(E \pm i\varepsilon), \quad (2.38)$$

und unter Ausnutzung der Resolventenidentitäten

$$g_{\gamma} = g_0 + g_0 V_{\gamma} g_{\gamma} = g_0 + g_{\gamma} V_{\gamma} g_0 \quad (2.39)$$

und

$$G = g_{\gamma} + g_{\gamma} \bar{V}_{\gamma} G = g_{\gamma} + G \bar{V}_{\gamma} g_{\gamma} \quad (2.40)$$

mit

$$\bar{V}_{\gamma} = V - V_{\gamma} \quad (2.41)$$

folgt, wenn man $\Omega_{\gamma}^{(\pm)}$ auf die Kanalzustände $|\Phi_{\gamma}\rangle$ zum Energieeigenwert E anwendet:

$$\Omega_{\gamma}^{(\pm)} = 1 + G(E \pm i\varepsilon) \bar{V}_{\gamma}. \quad (2.42)$$

Wie in [San 78] gezeigt wird, bilden die gemäß (2.34) konstruierten Drei-Teilchen-Streuzustände zusammen mit den Drei-Teil-

chen-Bindungszuständen $|\Psi_B\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

Mit $|\Psi_{0\vec{p}\vec{q}}^{(\pm)}\rangle = \mathcal{D}_0^{(\pm)} |\vec{p}\vec{q}\rangle$ und $|\Psi_{g n \vec{q}}^{(\pm)}\rangle = \mathcal{D}_g^{(\pm)} |\Psi_{g n \vec{q}}\rangle$
für $g = 1, 2, 3$ folgt also

$$\int |\Psi_{0\vec{p}\vec{q}}^{(\pm)}\rangle \langle \Psi_{0\vec{p}\vec{q}}^{(\pm)}| d^3(q) + \sum_{g=1}^3 \sum_n \int |\Psi_{g n \vec{q}}^{(\pm)}\rangle \langle \Psi_{g n \vec{q}}^{(\pm)}| d^3 q + \sum_B |\Psi_B\rangle \langle \Psi_B| = 1$$

und z.B.

$$\langle \Psi_{g' n' \vec{q}'}^{(\pm)} | \Psi_{g n \vec{q}}^{(\pm)} \rangle = \delta_{g'g} \delta_{n'n} \delta(\vec{q}' - \vec{q}) ,$$

$$\langle \Psi_{0\vec{p}'\vec{q}'}^{(\pm)} | \Psi_{g n \vec{q}}^{(\pm)} \rangle = 0 ,$$

$$\langle \Psi_B | \Psi_{g n \vec{q}}^{(\pm)} \rangle = 0 .$$

2.3 Spin und Isospin im Drei-Nukleonen-System

Nun müssen noch die Spin- und Isospinfreiheitsgrade eingeführt werden. Die Nukleonen sind Fermionen mit dem Spin $\sigma = \frac{1}{2}$, ihr Isospin ist $\tau = \frac{1}{2}$. Die zu σ und τ gehörenden magnetischen Quantenzahlen seien μ_σ und μ_τ . Für das Proton sei $\mu_\tau = \frac{1}{2}$ und für das Neutron $\mu_\tau = -\frac{1}{2}$. Der Spin- und Isospinanteil des Drei-Nukleonen-Zustandes hat dann die Form

$$|\mu_{\sigma_1} \mu_{\sigma_2} \mu_{\sigma_3} \mu_{\tau_1} \mu_{\tau_2} \mu_{\tau_3}\rangle = |\frac{1}{2} \mu_{\sigma_1} \frac{1}{2} \mu_{\tau_1}\rangle |\frac{1}{2} \mu_{\sigma_2} \frac{1}{2} \mu_{\tau_2}\rangle |\frac{1}{2} \mu_{\sigma_3} \frac{1}{2} \mu_{\tau_3}\rangle .$$

Entsprechend der Wahl der Jacobi-Koordinaten werden Spin bzw. Isospin der Teilchen des Subsystems zusammengekoppelt und dann dieser Subsystemspins bzw. -isospin t mit Spin bzw. Isospin des dritten Teilchens zum Gesamtspin S bzw. Gesamtspin T gekoppelt, und man erhält:

$$|g\rangle_g = |((\frac{1}{2} \frac{1}{2}) s \frac{1}{2}) S M_S ((\frac{1}{2} \frac{1}{2}) t \frac{1}{2}) T M_T\rangle_g = |s S M_S t T M_T\rangle_g = |s t\rangle_g . \quad (2.43)$$

Die zweite Form für $|\varphi\rangle$ kennzeichnet den Zustand eindeutig, da die Nukleonenquantenzahlen σ_i und τ_i immer den Wert $\frac{1}{2}$ haben; die Kurzform $|st\rangle$, die also nur die Subsystemquantenzahlen enthält, soll dann benutzt werden, wenn S, M_S, T und M_T festliegen. Der Gesamtspin kann, wie es sich aus der Kopplung ergibt, zwei Werte annehmen: $S = \frac{3}{2}$ (Quartettsystem mit $M_S = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$) und $S = \frac{1}{2}$ (Dublettsystem mit $M_S = \pm \frac{1}{2}$). T und M_T liegen für das Nukleon-Deuteron-System fest; es gilt: $T = \frac{1}{2}$. Im n-d-Falle hat man $M_T = -\frac{1}{2}$, und im p-d-Falle gilt $M_T = +\frac{1}{2}$.

Die Partialwellenentwicklung des Ortsanteiles des Drei-Nukleonen-Zustandes hat die Form:

$$|\hat{p} \hat{q}\rangle = \sum_{\ell \lambda L M} |p q \ell \lambda L M\rangle Y_{\ell \lambda L M}^*(\hat{p} \hat{q}) \quad (2.44)$$

mit den Richtungsvektoren $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $\hat{q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ und den gekoppelten Kugelfunktionen

$$Y_{\ell \lambda L M}(\hat{p} \hat{q}) = [Y_{\ell}(\hat{p}) Y_{\lambda}(\hat{q})]_{LM} = \sum_{m \mu} \langle \ell m \lambda \mu | L M \rangle Y_{\ell m}(\hat{p}) Y_{\lambda \mu}(\hat{q}).$$

Hier sind der Bahndrehimpuls ℓ des Subsystems und der des dritten Teilchens λ eingeführt worden. Die Partialwellen von (2.44) bilden zusammen mit dem Spin-Isospin-Anteil (2.43) die Basiszustände, mit denen im Folgenden gerechnet werden sollen:

$$|p q \alpha\rangle = |p q \ell \lambda L M S S M_S T M_T\rangle \quad (2.45)$$

mit $\alpha = (\ell \lambda \varrho)$, $\Lambda = (\ell \lambda L M)$ und $\varrho = (S S M_S T M_T)$. Für die Zustände (2.45) lauten Vollständigkeits- und Orthogonalitätsrelation so:

$$\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} |p q \alpha\rangle \langle p q \alpha| p^2 q^2 dp dq = 1, \quad (2.46)$$

$$\langle p'q'\alpha' | pq\alpha \rangle = \frac{\delta(p'-p)}{p'p} \frac{\delta(q'-q)}{q'q} \delta_{\alpha'\alpha} \quad (2.47)$$

Eine Kopplung von Bahndrehimpuls L und Spin S zum Gesamtdrehimpuls J ist nicht notwendig, da die Potentiale, die in dieser Arbeit benutzt werden, sowohl Gesamtbahndrehimpuls als auch Gesamtspin erhalten; L und S sind folglich gute Quantenzahlen. Die Zustände (2.45) sind die Kanalzustände $|\Phi_0\rangle$ zum Kanal O , der freien Bewegung aller drei Nukleonen. Aus (2.45) erhält man die Kanalzustände zu den anderen Kanälen, indem man über den Bindungszustand integriert:

$$|\Phi_g\rangle = |\psi_{gn} q\alpha\rangle_g = \int_0^\infty |pq\alpha\rangle_g \langle p|\psi_{gn}\rangle p^2 dp. \quad (2.48)$$

Eine Schwierigkeit in der Drei-Teilchen-Theorie ist, daß von einem Jacobi-Koordinatensystem zum anderen transformiert werden muß. So kommen zum Beispiel folgende Skalarprodukte vor:

$$\langle p'q'\alpha' | pq\alpha \rangle_2 \quad \text{oder} \quad \langle p'q'\alpha' | pq\alpha \rangle_3.$$

Diese können als Matrixelemente von Permutationsoperatoren geschrieben werden. Es seien P_{ij} mit $i \neq j$ die Vertauschungen, dann lassen sich die zyklischen Permutationen so schreiben:

$$P_{231} |\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle = P_{12} P_{13} |\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle = |\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1\rangle,$$

$$P_{312} |\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle = P_{13} P_{12} |\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle = |\varphi_3 \varphi_1 \varphi_2\rangle.$$

Angewandt auf die Basiszustände (2.45) ergibt sich:

$$P_{231} |pq\alpha\rangle_1 = |pq\alpha\rangle_2, \quad (2.49)$$

$$P_{312} |pq\alpha\rangle_1 = |pq\alpha\rangle_3.$$

Da immer nur die Summe der zyklischen Permutationen, $P = P_{231} + P_{312}$,

auftritt, braucht nur diese betrachtet zu werden:

$$\langle p'q'\alpha' | P | pq\alpha \rangle_1 = \langle p'q'\alpha' | pq\alpha \rangle_2 + \langle p'q'\alpha' | pq\alpha \rangle. \quad (2.50)$$

Für den Bahnanteil P_r von P folgt aus (2.7) und (2.8)

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}'\vec{q}' | P_r | \vec{p}\vec{q} \rangle_1 &= \delta(\vec{p}' - (-\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{3}{4}\vec{q})) \delta(\vec{q}' - (-\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q})) \\ &+ \delta(\vec{p}' - (-\frac{1}{2}\vec{p} - \frac{3}{4}\vec{q})) \delta(\vec{q}' - (\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q})) \end{aligned} \quad (2.51)$$

und aus (2.9) und (2.10)

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}'\vec{q}' | P_l | \vec{p}\vec{q} \rangle_1 &= \delta(\vec{p}' - (\frac{1}{2}\vec{q}' + \vec{q})) \delta(\vec{p} - (\vec{q}' - \frac{1}{2}\vec{q})) \\ &+ \delta(\vec{p}' - (\frac{1}{2}\vec{q}' - \vec{q})) \delta(\vec{p} - (\vec{q}' + \frac{1}{2}\vec{q})) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Da also die Matrixelemente von P Distributionen sind, treten sie nur in Integralen auf; die Integrationsvariablen legen dann fest, ob (2.51) oder (2.52) benutzt werden muß.

Die Matrixelemente von P zu den Basiszuständen $|pq\alpha\rangle_g$ werden im Anhang A hergeleitet. Falls über p und q zu integrieren ist, gilt folgendes:

$$\begin{aligned} \langle p'q'\alpha' | P | pq\alpha \rangle_1 &= \delta_{L'L} \delta_{M'M} \delta_{S'S} \delta_{M'_S M_S} \delta_{T'T} \delta_{M'_T M_T} \\ &\cdot \frac{1}{2} \wedge_{S'S}^S \wedge_{T'T}^T \left[(-1)^{L'+S'+T'} + (-1)^{L+S+T} \right] \\ &\cdot \int_{-1}^1 \frac{P_{L'L} \wedge_{L'L}}{p^{L+2} q^{L+2}} \delta(p - \sqrt{\frac{4}{4} p^2 + \frac{9}{16} q^2 - \frac{3}{4} p'q'}) \\ &\cdot \delta(q - \sqrt{p'^2 + \frac{1}{4} q'^2 - p'q'x}) dx \quad ; \end{aligned} \quad (2.53)$$

dabei ist $P_{\mu' \lambda \lambda'}(p' q' x)$ in (A.15) und $\Lambda_{s's}^S$ bzw. Λ_{tt}^T in (A.21) definiert. Die Werte der Koeffizienten $\Lambda_{s's}^S$ sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

S	s	s'	$\Lambda_{s's}^S$
1/2	0	0	1
1/2	0	1	$\sqrt{3}$
1/2	1	0	$\sqrt{3}$
1/2	1	1	-1
3/2	0	0	0
3/2	0	1	0
3/2	1	0	0
3/2	1	1	-1

Tabelle 2.1: Spin-Umkopplungskoeffizienten

Die Form des Matrixelementes, die bei Integration über p' und p angewandt werden muß, wird nur für s-Wellen im Subsystem benötigt:

$$\begin{aligned}
 \langle p' q' 0 L L' M' s' S' M'_S T' M'_T | P | p q 0 L L M s S M_S T M_T \rangle = \\
 = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \delta_{SS'} \delta_{M'_S M_S} \delta_{TT'} \delta_{M'_T M_T} \cdot \frac{1}{2} \left[(-1)^{s'+t'} + (-1)^{s+t} \right] \\
 \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_L(x)}{p'^2 p^2} \delta(p' - \sqrt{\frac{1}{4} q'^2 + q^2 + q' q x}) \delta(p - \sqrt{q'^2 + \frac{1}{4} q^2 + q' q x}) dx .
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

Damit sind die Formeln zusammengestellt, die zur Durchführung der Drei-Teilchen-Theorie gebraucht werden.

3. Zweinukleonenpotential

In diesem Kapitel wird die Wechselwirkung im Zwei-Nukleonen-System eingeführt, die dann für die Drei-Nukleonen-Rechnung benutzt werden soll. Um eine möglichst einfache Form für die Integralgleichungen zu erhalten, die das Drei-Nukleonen-System beschreiben, sollen separable Potentiale gewählt werden. Obwohl sich separable Ansätze für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung theoretisch nicht begründen lassen, und obwohl solche separablen Potentiale die experimentellen N-N-Daten nicht so gut wiedergeben wie zum Beispiel das Reid-Potential [Rei 68], erhält man dennoch für das Drei-Nukleonen-System gute Ergebnisse [Bru 77, Dol 73, Dol 82]. Als weitere Vereinfachung soll der Tensoranteil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Triplettssystem vernachlässigt werden; darüber hinaus soll die Wechselwirkung nur in s-Wellen wirken. Damit hat man nur die Partialwellen zu 3S_1 und 1S_0 zu betrachten. Trotzdem ergeben auch Rechnungen mit diesen sehr einfachen Wechselwirkungen, daß eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Wirkungsquerschnitten bei der n-d Aufbruchreaktion zu erzielen ist [Ebe 72].

Eine ausführliche Darstellung der separablen Potentiale gibt Levinger [Lev 74]. Im Folgenden werden die wichtigsten Formeln für separable Potentiale vom Range 1 aufgeführt. Dann wird das Yamaguchi-Potential vorgestellt, das, wie später gezeigt wird, für Rechnungen unter Einschluß des Dreinukleonenpotentials völlig ungeeignet ist. Als zweckmäßiges Zweinukleonenpotential bietet sich das durch Unitäre-Pol-Approximation (UPA) an das lokale Malfliet-Tjon-Potential gewonnene separable Potential an; dies wird in den beiden letzten Abschnitten dieses Kapitels vorgeführt.

3.1 Separable Potentiale vom Range 1

Das Impulsraum-Matrixelement einer separablen Wechselwirkung vom Range 1 für das Nukleon-Nukleon-System ist durch

$$\langle \vec{p}' s' m_s' t' m_t' | V | \vec{p} s m_s t m_t \rangle = \delta_{s's} \delta_{m_s' m_s} \delta_{t't} \delta_{m_t' m_t} V_s(\vec{p}', \vec{p}) \quad (3.1)$$

und
$$V_s(\vec{p}', \vec{p}) = \lambda_s \chi_s(p') \chi_s(p) \quad (3.2)$$

gegeben. Dabei gibt λ_s die Stärke des Potentials an. Die Funktion $\chi_s(p)$ wird im allgemeinen Formfaktor genannt. Der Relativimpuls $\vec{p}$ der beiden Nukleonen ist durch $\vec{p} = \frac{1}{2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ definiert. Da das Potential nur in s-Wellen wirken soll, darf der Formfaktor nur vom Betrag von $\vec{p}$, nicht aber von der Richtung von $\vec{p}$ abhängen. Daher ist bei Vorgabe des Spins s auch der Isospin t festgelegt. Zum Spintriplett ($s=1$) gehört das Isospinsingulett ($t=0$) und zum Spinsingulett ($s=0$) das Isospintriplett ($t=1$); es reicht also ein Index zur Charakterisierung des Formfaktors und des Potentials aus, die Abhängigkeit vom Isospin t kann weggelassen werden. Das volle Potential kann also so geschrieben werden:

$$V = \sum_{s=0}^1 |\chi_s\rangle \lambda_s \langle \chi_s| \quad (3.3)$$

mit
$$|\chi_s\rangle = \int |\vec{p} s m_s t m_t\rangle \chi_s(p) d^3p .$$

Dies ist also genau die Form, die in den Hamiltonoperator des Drei-Nukleonen-Systems (2.27) einzusetzen ist. Es gilt zum Beispiel für $V_1 = V_{23}$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' \vec{q}' s' | V_1 | \vec{p} \vec{q} s \rangle &= \delta_{s's} \delta_{m_s' m_s} \delta_{T'T} \delta_{M_T' M_T} \delta_{ss} \delta_{t't} \\ &\cdot \delta(\vec{q}' - \vec{q}) \lambda_s \chi_s(p') \chi_s(p) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Zum Spintriplettsystem existiert bei der N-N-Wechselwirkung ein Bindungszustand $|\psi_{\text{Deut}}\rangle$, das Deuteron, mit der Bindungsenergie $E_{\text{Deut}} = -\frac{\hbar^2}{m} \kappa_1^2$. Der exponentielle Abfall der Ortsraumfunktion $\langle \vec{r} | \psi_{\text{Deut}} \rangle$ ist durch κ_1 bestimmt; damit $|\psi_{\text{Deut}}\rangle$ normierbar ist, muß κ_1 positiv sein und E_{Deut} liegt im ersten Blatt. Aus der Schrödingergleichung für $|\psi_{\text{Deut}}\rangle$ folgt:

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{Deut}}\rangle &= g_0(E_{\text{Deut}}) V |\psi_{\text{Deut}}\rangle \\ &= \lambda_1 g_0(E_{\text{Deut}}) |\chi_1\rangle \langle \chi_1 | \psi_{\text{Deut}} \rangle . \end{aligned}$$

Normiert man den Formfaktor so, daß $\lambda_1 \langle \chi_1 | \psi_{\text{Deut}} \rangle = 1$ gilt, folgt:

$$|\psi_{\text{Deut}}\rangle = g_0(E_{\text{Deut}}) |\chi_1\rangle \quad (3.5)$$

oder $|\chi_1\rangle = V |\psi_{\text{Deut}}\rangle . \quad (3.6)$

Der Energieeigenwert E_{Deut} wird durch

$$\frac{1}{\lambda_1} = \langle \chi_1 | g_0(E_{\text{Deut}}) | \chi_1 \rangle = \int_0^\infty \frac{|\chi_1(p)|^2 p^2 dp}{E_{\text{Deut}} - \frac{\hbar^2}{m} p^2} \quad (3.7)$$

festgelegt.

Die Normierung des Bindungszustandes liefert eine weitere Beziehung zur Festlegung des Triplettpotentials:

$$1 = \langle \psi_{\text{Deut}} | \psi_{\text{Deut}} \rangle = \langle \chi_1 | g_0^2(E_{\text{Deut}}) | \chi_1 \rangle . \quad (3.8)$$

So wie man die Schrödinger-Gleichung für separable Potentiale, wie oben gezeigt, algebraisch lösen kann, kann auch für die Lippmann-

Schwinger-Gleichung die Lösung, die T-Matrix, explizit angeben.

Es sei $z = E + i\epsilon = \frac{\hbar^2}{m} p^2 + i\epsilon$. Aus

$$\begin{aligned} t(z) &= V + V g_0(z) t(z) \\ &= \sum_{s=0}^1 |\chi_s\rangle \lambda_s \langle \chi_s| + \sum_{s=0}^1 |\chi_s\rangle \lambda_s \langle \chi_s| g_0(z) t(z) \end{aligned}$$

folgt wegen

$$\langle \chi_s | g_0 t = \langle \chi_s | g_0 | \chi_s \rangle \lambda_s \langle \chi_s | + \langle \chi_s | g_0 | \chi_s \rangle \lambda_s \langle \chi_s | g_0 t$$

$$\text{d.h. } \langle \chi_s | g_0 t = \frac{\langle \chi_s | g_0 | \chi_s \rangle}{\frac{1}{\lambda_s} - \langle \chi_s | g_0 | \chi_s \rangle} \langle \chi_s | ,$$

die gesuchte Lösung für die T-Matrix:

$$t(z) = \sum_{s=0}^1 |\chi_s\rangle \tau_s(z) \langle \chi_s| \quad (3.9)$$

$$\text{mit } \tau_s(z) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_s} - \langle \chi_s | g_0(z) | \chi_s \rangle} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_s} - \int_0^\infty \frac{|\chi_s(p)|^2 p^2 dp}{z - \frac{\hbar^2}{m} p^2}} \quad (3.10)$$

Wie das Potential V ist also auch die zugehörige T-Matrix separabel.

Setzt man für $s=1$ in (3.10) den Ausdruck (3.7) für λ_1 ein und nutzt die Resolventenidentität $g_0(z_1) - g_0(z_2) = (z_1 - z_2) g_0(z_1) g_0(z_2)$ aus, ergibt sich

$$\tau_1(z) = \frac{1}{(z - E_{\text{Deut}}) \langle \chi_1 | g_0(E_{\text{Deut}}) g_0(z) | \chi_1 \rangle} \quad (3.11)$$

Für $z \approx E_{\text{Deut}}$ gilt wegen (3.8): $\tau_1(z) \approx \frac{1}{z - E_{\text{Deut}}}$

Das bedeutet, daß $\tau_1(z)$ und somit auch $t(z)$ bei der Deuteronbindungsenergie E_{Deut} einen Pol besitzt:

$$t(z) \approx |\chi_A\rangle \frac{1}{z - E_{\text{Deut}}} \langle \chi_A| = V |\psi_{\text{Deut}}\rangle \frac{1}{z - E_{\text{Deut}}} \langle \psi_{\text{Deut}}| V, \quad z \approx E_{\text{Deut}}. \quad (3.12)$$

Dieses Verhalten folgt ganz allgemein für die T-Matrix aus der Spektraldarstellung, die sich aus $t(z) = V + V g(z) V$ ergibt, wo $g(z)$ die Resolvente zum vollen Hamiltonoperator ist:

$$t(z) = V + \sum_B V |\psi_B\rangle \frac{1}{z - E_B} \langle \psi_B| V + \sum_{\substack{s m_s \\ t m_t}} \int V |\psi_p^{(s)} s m_t m_t\rangle \frac{1}{z - \frac{\hbar^2}{m} p^2} \langle \psi_p^{(s)} s m_t m_t| V d^3 p$$

mit den Bindungszuständen $|\psi_B\rangle$ und den Streuzuständen $|\psi_p^{(s)}\rangle$, die sich aus den ebenen Wellen $|\vec{p}\rangle$ entwickeln. Somit hat die T-Matrix zum separablen Potential das richtige singuläre Verhalten.

Das Nukleon-Nukleon-Singulett-System ist ungebunden; die Schrödinger-Gleichung hat aber eine nicht-normierbare Lösung, die im Ortsraum einen exponentiellen Anstieg hat, der durch ein negatives κ_0 gegeben ist. Es liegt also ein Antiboundstate mit der Energie $E_{\text{Anti}} = -\frac{\hbar^2}{m} \kappa_0^2$ vor. Die T-Matrix hat auch bei E_{Anti} einen Pol, jedoch nicht im ersten, sondern im zweiten Blatt.

Die Matrixelemente von $t(z)$ haben bezüglich der Basis $|p l m s m_s t m_t\rangle$ die Form:

$$\begin{aligned} \langle p' l' m' s' m'_s t' m'_t | t(z) | p l m s m_s t m_t \rangle &= \delta_{l'l} \delta_{m'm} \delta_{s's} \delta_{m'_s m_s} \\ &\cdot \delta_{t't} \delta_{m'_t m_t} \delta_{e_0} \delta_{m_0} \chi_s(p') \tau_s(z) \chi_s(p). \end{aligned}$$

Dabei sind die Partialwellen $|p l m\rangle$ durch $|\vec{p}\rangle = \sum_{l m} |p l m\rangle Y_{l m}^*(\hat{p})$ definiert. Es ergibt sich mit

$$|\chi_s 0 0\rangle = \int_0^\infty |p 0 0\rangle \chi_s(p) p^2 dp \quad (3.13)$$

die Darstellung

$$t(z) = \sum_{s m_s t m_t} |\chi_s 00 s m_s t m_t\rangle T_s(z) \langle \chi_s 00 s m_s t m_t |. \quad (3.14)$$

Auch hier ist t durch s festgelegt. Bei der Ableitung der Faddejev-Gleichungen wird die T -Matrix auch als Operator im Drei-Teilchen-Raum gebraucht. Sei nun z die Gesamtenergie des Drei-Teilchen-Systems, so folgt aus (3.14):

$$\begin{aligned} \langle p' q' l' \lambda' L M' s' SM_s t' TM_T | t(z) | p q l \lambda L M s SM_s t TM_T \rangle = \\ = \delta_{l'0} \delta_{l0} \delta_{\lambda' L} \delta_{s' s} \delta_{t' t} \frac{\delta(q'-q)}{q'q} \chi_s(p') T_s(z - \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q^2) \chi_s(p). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei ist $z - \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q^2$ die Energie des Zwei-Nukleonen-Subsystems. 1. Weil $t(z)$ nur auf dieses Subsystem wirkt, ist es in λ, L, M, S, M_s, T und M_T diagonal. Als Darstellung im Drei-Nukleonen-Raum erhält man

$$\begin{aligned} t(z) = \sum_{\substack{s L M \\ S M_s T M_T}} \int_0^\infty |\chi_s q 0 L M s SM_s t TM_T \rangle \\ \cdot T_s(z - \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q^2) \langle \chi_s q 0 L M s SM_s t TM_T | q^2 dq. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Das on-shell-Matrixelement von (3.14), wo also $p' = p$ und $z = \frac{\hbar^2}{m} p^2 + i\epsilon$ gilt, ist proportional zur Streuamplitude, die den Zusammenhang mit der Streuphase δ_s liefert.

$$\langle p 00 s m_s t m_t | t(z) | p 00 s m_s t m_t \rangle = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{2\pi^2} f_s(p) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{2ip} (e^{2i\delta_s} - 1). \quad (3.17)$$

Streulänge a_s und effektive Reichwerte r_s folgen aus der "effective-range"-Entwicklung:

$$\bar{p} \cot \delta_s = \frac{1}{f_s(p)} + ip = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2} r_s p^2 + \dots \quad (3.18)$$

3.2 Yamaguchi-Potential

Das Yamaguchi-Potential [Yam 54] wird häufig in Drei-Nukleonen-Rechnungen benutzt, weil es trotz seiner einfachen Form relativ gute Ergebnisse liefert. Der Formfaktor ist durch

$$\chi_s(p) = \frac{N_s}{p^2 + \beta_s^2} \quad (3.19)$$

gegeben. Da $\chi_s(p)$ nur vom Betrag von $\vec{p}$ abhängt, wirkt also das Yamaguchi-Potential

$$V_s(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{\lambda_s N_s^2}{(p'^2 + \beta_s^2)(p^2 + \beta_s^2)} \quad (3.20)$$

nur in s-Wellen. Aus den Bedingungen (3.7) und (3.8) folgen für das Triplett-Potential ($s=1$)

$$N_s = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{4}{\pi} \beta_s |\kappa_s| (\beta_s + \kappa_s)^3} \quad , \quad (3.21)$$

$$\lambda_s = -\frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{|\kappa_s| (\beta_s + \kappa_s)} = -\frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{4}{\pi} \frac{\beta_s (\beta_s + \kappa_s)^2}{N_s^2} \quad . \quad (3.22)$$

Diese Festlegungen können aber auch für $s=0$ benutzt werden; da hier $\kappa_0 < 0$ ist, müssen die Beträge bei $|\kappa_s|$ stehen. Das Integral, das im Nenner von (3.10) steckt, läßt sich ausführen und es ergibt sich

$$\tau\left(\frac{\hbar^2}{m}(p+i\varepsilon)^2\right) = \lambda_s \frac{(p+i\beta_s)^2}{(p+i\varepsilon-\kappa_s)(p+2i\beta_s+i\kappa_s)} \quad , \quad (3.23)$$

wobei $\frac{1}{p+i\varepsilon-i\kappa_s}$ für den Pol bei E_{Deut} bzw. E_{Anti} verantwortlich ist. Nach (3.17) läßt sich die Streuamplitude $f_s(p)$ berechnen, die in (3.18) eingesetzt, die "effective-range"-Entwicklung ergibt:

$$p \cot \delta_s = - \frac{\beta_s \kappa_s (2\beta_s + \kappa_s)}{2(\beta_s + \kappa_s)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\beta_s^2 + 2\beta_s \kappa_s + \kappa_s^2}{\beta_s (\beta_s + \kappa_s)^2} p^2 \quad (3.24)$$

$$+ \frac{p^4}{2\beta_s (\beta_s + \kappa_s)}$$

Bemerkenswert ist, daß die "effective-range"-Entwicklung (3.24) exakt nach dem dritten Term abbricht. Die Koeffizienten legen Streulänge und effektive Reichweite fest:

$$a_s = \frac{2(\beta_s + \kappa_s)^2}{\beta_s \kappa_s (2\beta_s + \kappa_s)} \quad , \quad (3.25)$$

$$r_s = \frac{3\beta_s^2 + 2\beta_s \kappa_s + \kappa_s^2}{\beta_s (\beta_s + \kappa_s)^2} \quad (3.26)$$

Für die Rechnungen in dieser Arbeit wurden β_s und κ_s gemäß Tabelle 3.1 gewählt; die aus β_s und κ_s abgeleiteten Größen werden ebenfalls aufgeführt, dabei steht E_s für E_{Deut} bzw. E_{Anti} . Dieses Potential ist ladungsunabhängig, da es für $s=0$ im n - n -, n - p - und p - p -System gleich ist.

s	$\beta_s \cdot \text{fm}$	$\kappa_s \cdot \text{fm}$	a_s / fm	r_s / fm	E_s / MeV
0	1,1771	-0,03992	5,41	1,76	-2,226
1	1,4057	0,2317	-23,78	2,67	-0,0661

Tabelle 3.1: Parameter des Yamaguchi-Potentiales

Kurve 1 der Abbildung 3.1 stellt den Singulett-Formfaktor und Kurve 1 der Abbildung 3.2 stellt den Triplett-Formfaktor des Yamaguchi-Potentiales dar. In beiden Fällen gibt es keinen Null-durchgang: $\chi_s(p)$ ist immer positiv. Da λ_s negativ ist, folgt, daß auch $V_s(\vec{p}, \vec{p})$ immer negativ ist: Das Yamaguchi-Potential ist also rein attraktiv. Es besitzt keinen "hard-core", was zur

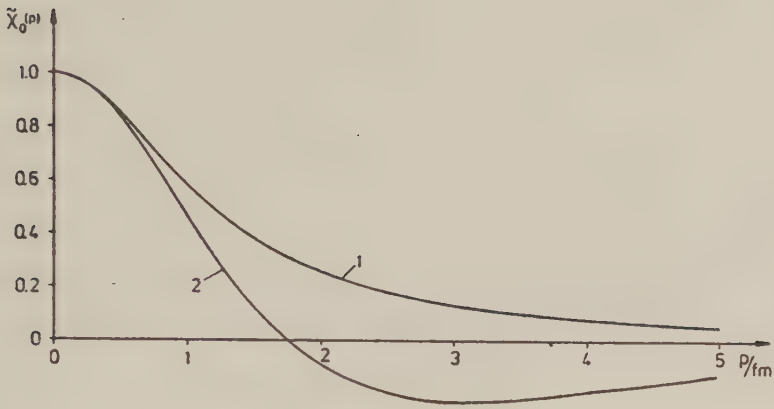


Abbildung 3.1: Singulett-Formfaktor (bei $p=0$ auf $\tilde{\chi}_0(0)=1$ normiert);
Kurve 1: Yamaguchi-Potential; Kurve 2: UPA-MT-Potential

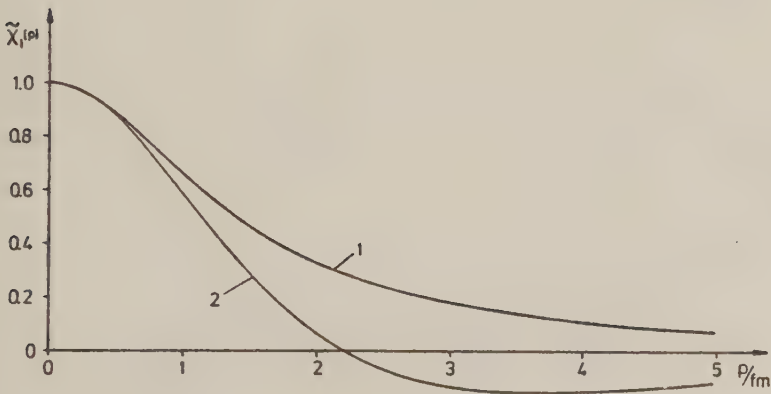


Abbildung 3.2: Triplett-Formfaktor (Kurven wie in Abb. 3.1)

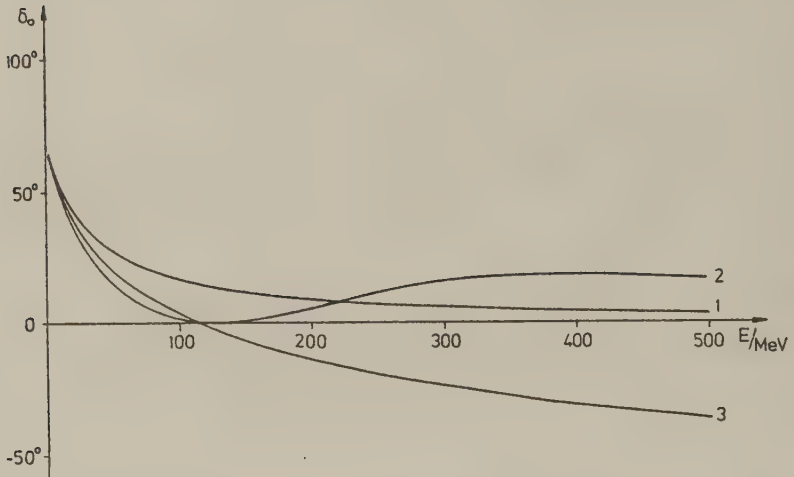


Abbildung 3.3: Singulett-Streuphasen; Kurve 1: Yamaguchi-Potential, Kurve 2: UPA-MT-Potential, Kurve 3: MT-Potential

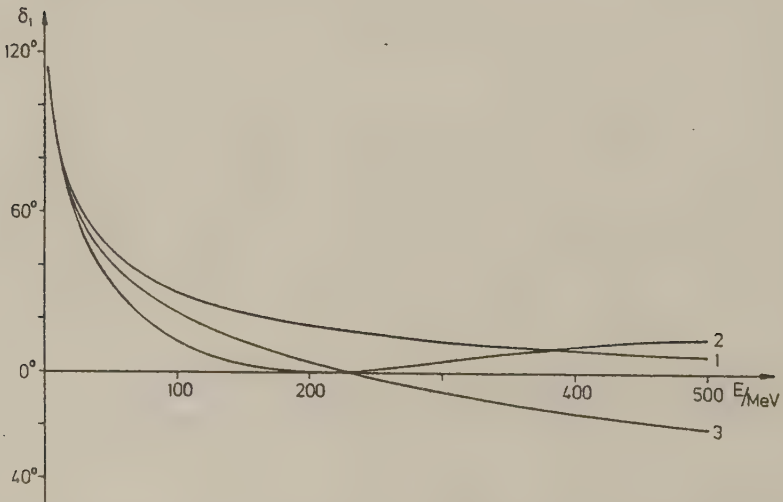


Abbildung 3.4: Triplett-Streuphasen (Kurven wie in Abb. 3.3)

Folge haben muß, daß die Streuphasen für hohe Energien sehr unrealistisch werden (siehe die Abbildungen 3.3 und 3.4). Diese Schwäche des Yamaguchi-Potentiales wird sich ganz deutlich bei den Rechnungen mit dem Dreinukleonenpotential zeigen.

Den "hard-core" der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung kann man mit einem separablen Potential vom Range 2 simulieren, bei dem der zweite Anteil repulsiv ist. Da dies jedoch das Integralgleichungssystem vergrößern würde, soll, wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, ein separables Potential vom Range 1 konstruiert werden, das attraktive und repulsive Bereiche hat.

3.3 Konstruktion separabler Potentiale durch unitäre Pol-Approximation

In diesem Abschnitt soll ein separables Potential konstruiert werden, das eine Näherung an ein beliebiges Potential ist, das durch

$$V(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{lm} V_l(p', p) Y_{lm}(\hat{p}') Y_{lm}^*(\hat{p}) \quad (3.27)$$

gegeben sei. Die Lippmann-Schwinger-Gleichung hat für die Partialwellenanteile der T-Matrix

$$t(\vec{p}', \vec{p}, z) = \langle \vec{p}' | t(z) | \vec{p} \rangle = \sum_{lm} t_l(p', p, z) Y_{lm}(\hat{p}') Y_{lm}^*(\hat{p}) \quad (3.28)$$

die Form

$$t_l(p', p, z) = V_l(p', p) + \int_0^\infty K_l(p', p'') t_l(p', p'', z) dp'' \quad (3.29)$$

mit dem Integralkern

$$K_l(p', p'') = V_l(p', p'') \frac{p'^2}{z - \frac{p'^2}{m}} \quad (3.30)$$

Zu diesem Integralkern lassen sich aus der Eigenwertgleichung

$$k_n \chi_{ne}(p) = \int_0^\infty K_e(p', p'') \chi_{ne}(p'') dp'' \quad (3.31)$$

die Eigenwerte k_n und die Eigenfunktionen χ_{ne} bestimmen. Für $k_n=1$ ist (3.31) genau die homogene Lippmann-Schwinger-Gleichung. Wie von Harms [Har 70] gezeigt wird, kann mit diesen Eigenwerten k_n und Eigenfunktionen χ_{ne} das Potential $V_e(p', p)$ nach separablen Termen entwickelt werden; dies ist die sogenannte "unitary-pole-expansion" (UPE):

$$V_e(p', p) = \sum_n k_n \chi_{ne}(p') \chi_{ne}(p) \quad (3.32)$$

Die Näherung, bei der von der Entwicklung (3.32) nur der Term mit dem größten positiven Eigenwert mitgenommen wird, ist die "unitary-pole-approximation" (UPA). Damit hat man also das Potential $V_e(p', p)$ durch das separable Potential vom Range 1 $V_e^{UPA}(p', p) = k_1 \chi_{1e}(p') \chi_{1e}(p)$ (hier sei k_1 dieser größte positive Eigenwert) angenähert.

Die Bedeutung von χ_{ne} wird klar, wenn man die zu (3.31) adjungierte Gleichung betrachtet:

$$k_n \psi_{ne}(p) = \frac{1}{z - \frac{\hbar^2}{m} p^2} \int_0^\infty V_e(p', p'') \psi_{ne}(p'') p'^2 dp'' \quad (3.33)$$

Die Eigenwerte sind genau dieselben wie in (3.31) und der Zusammenhang zwischen χ_{ne} und ψ_{ne} ist durch

$$\psi_{ne}(p) = \frac{1}{z - \frac{\hbar^2}{m} p^2} \chi_{ne}(p) \quad (3.34)$$

gegeben. Falls z genau der Energieeigenwert ist, muß $k_1=1$ sein, da dann (3.33) die Integralform der Schrödinger-Gleichung ist: Gleichung (3.34) ist dann identisch mit der Impulsraumdarstellung von (3.5).

Das Verfahren zur Festlegung des separablen UPA-Potentials zu einem vorgegebenen Potential für das Triplett-System ist also folgendes: Es werde hier nur der s-Wellenanteil von $V(\vec{p}', \vec{p})$ betrachtet. Zu der Gleichung

$$k \chi_1(p) = \int_0^\infty \frac{V_0(p', p'')}{z - \frac{\hbar^2}{m} p'^2} \chi_1(p') p'^2 dp' , \quad (3.35)$$

die aus (3.31) für $\ell=0$ folgt, wird die Energie z derart bestimmt, daß der größte positive Eigenwert zu 1 wird; z ist dann die Deuteronbindungsenergie. Die Lösung χ_1 von (3.35) ist dann, bis auf die Normierung, die gemäß (3.8) festgelegt wird, der gesuchte Triplett-Formfaktor. Nach (3.7) wird dann der Stärkeparameter berechnet. Die T-Matrix, die sich aus dem derart bestimmten UPA-Potential ergibt, hat dann bei der Deuteronenergie dasselbe Polverhalten wie die aus dem Ausgangspotential abgeleitete T-Matrix.

Da im Singulett-Fall das N-N-Potential keinen Bindungszustand hat, sondern ein Antiboundstate existiert, muß hier das Verfahren anders sein. Bakker [Bak 73] löst die Gleichung (3.31) bei der Energie $z=0$; dabei nimmt er in Kauf, daß die T-Matrix beim Antiboundstate im zweiten Blatt nicht das richtige Verhalten hat. Da jedoch die Energie des Antiboundstates recht klein ist (nach Tabelle 3.1 ist für das Yamaguchi-Potential $E_{\text{Anti}} = -66,1 \text{ keV}$), ist zu erwarten, daß sich der Pol der T-Matrix, der bei E_{Anti} im zweiten Blatt liegt, auch bei kleinen positiven Streuenergien noch bemerkbar macht. Es ist daher sinnvoll, nicht bei $z=0$, sondern bei $z=E_{\text{Anti}}$ anzupassen; dazu muß Gleichung (3.35) modifiziert werden.

Zur Antiboundstateenergie $E_{\text{Anti}} = \frac{\hbar^2}{m} (i\kappa_0)^2$, die ja wegen $\kappa_0 < 0$ im zweiten Blatt liegt, gelangt man auf folgendem Wege. Es sei $z = \frac{\hbar^2}{m} p_z^2 \in \mathbb{C}$. Solange p_z einen positiven Imaginärteil hat, kann in (3.35) längs der reellen Achse von 0 bis ∞ integriert werden (Abbildung 3.5a).

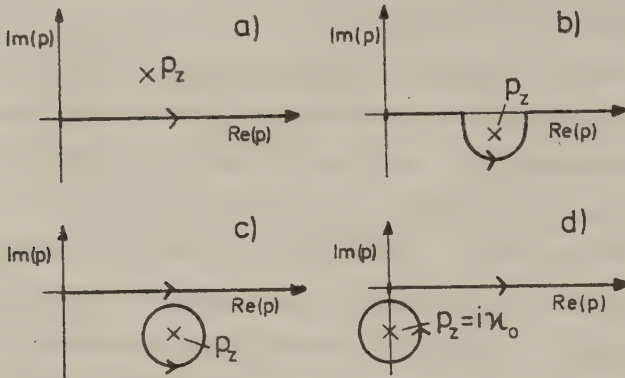


Abbildung 3.5: Integrationsweg in der Integralgleichung für den Singulett-UPA-Formfaktor

Wenn p_z in den vierten Quadranten eintaucht, muß der Integrationsweg wie in Abbildung 3.5b verbogen werden; dies ist möglich, da der Integralkern von (3.35) bis auf $p = p_z$ analytisch ist. Nun kann ein geschlossener Weg um p_z abgeschnürt werden (Abbildung 3.5c), und p_z kann ohne Probleme nach $i\kappa_0$, d.h. auf die negative imaginäre Achse verschoben werden (Abbildung 3.5d). Das Kurvenintegral um $i\kappa_0$ läßt sich berechnen:

$$\oint V_0(p', p'') \frac{p''^2}{z - \frac{\hbar^2}{m} p''^2} \chi_0(p'') dp'' = \frac{m}{\hbar^2} \oint V_0(p', p'') \frac{p''^{\frac{1}{2}} \chi_0(p'')}{(i\kappa_0 - p'')(i\kappa_0 + p'')} dp'' \quad (3.36)$$

$$= -\pi \cdot \frac{m}{\hbar^2} \kappa_0 V(p', i\kappa_0) \chi_0(i\kappa_0).$$

Damit ergibt sich die Gleichung:

$$k \chi_0(p') = \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty V_0(p', p'') \frac{p''^2 \chi_0(p'')}{-k_0^2 - p''^2} dp'' - \frac{m}{\hbar^2} \pi \kappa_0 V_0(p', i\kappa_0) \chi_0(i\kappa_0). \quad (3.37)$$

Da mit $\chi_0(i\kappa_0)$ eine weitere Unbekannte auftritt, braucht man

$$k \chi_0(i\kappa_0) = \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty V_0(i\kappa_0, p'') \frac{p''^2 \chi_0(p'')}{-k_0^2 - p''^2} dp'' - \frac{m}{\hbar^2} \pi \kappa_0 V_0(i\kappa_0, i\kappa_0) \chi_0(i\kappa_0) \quad (3.38)$$

als weitere Gleichung, die $\chi_0(p)$ festlegt. Wie beim Triplett wird $\chi_0(p)$ bestimmt, daß k , der größte positive Eigenwert, zu 1 wird; die zugehörige Eigenfunktion ist dann, bis auf einen Normierungsfaktor, der gesuchte Singulett-Formfaktor.

Bei dem in dieser Arbeit gewählten Verfahren zur Lösung der Faddeev-Gleichungen (siehe unten) werden die Formfaktoren auch für negative p^2 , also für positiv-imaginäre Argumente, gebraucht; diese können, sobald man $\chi_s(p)$ numerisch vorliegen hat, mit (3.35) bzw. (3.37), wobei p durch ip ersetzt werden muß, berechnet werden. Auch $\tau_s(p)$ muß durch numerische Integration nach Gleichung (3.10) bestimmt werden.

3.4 UPA zum Malfliet-Tjon-Potential

Ein einfaches lokales Ortsraumpotential, das für kleine Nukleonenabstände repulsiv ist und somit den "hard-core" simuliert, ist das Malfliet-Tjon-Potential (MT-Potential) [Mal 69]. Es liefert relativ gute Ergebnisse für Wenig-Nukleonen-Systeme [Bak 75, Klotz 73].

Das MT-Potential setzt sich zusammen aus zwei Termen der Form

$$\langle \vec{r}' | V | \vec{r} \rangle = \frac{\lambda}{\mu} \frac{e^{-\mu r}}{r} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) .$$

In den Impulsraum transformiert ergibt sich

$$\langle \vec{p}' | V | \vec{p} \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{p'^2 + p^2 - 2p'p \hat{p}' \cdot \hat{p}} = \sum_{\ell m} V_{\ell}(p', p) Y_{\ell m}(\hat{p}') Y_{\ell m}^*(\hat{p})$$

$$\text{mit } V_{\ell}(p', p) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\mu} \int_{-1}^1 \frac{P_{\ell}(x) dx}{p'^2 + p^2 - 2p'p \hat{p}' \cdot \hat{p}} .$$

Für die s-Welle ($\ell=0$) erhält man nach Ausführung der Integration

$$V_0(p', p) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{4p'p} \ln \frac{p'^2 + p^2 + \mu^2 + 2p'p}{p'^2 + p^2 + \mu^2 - 2p'p} , \quad p' \neq 0 \neq p , \quad (3.39)$$

$$V_0(0, p) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{p^2 + \mu^2} \quad (3.40)$$

und es gilt: $V_0(p', p) = V_0(p, p')$.

In (3.37) und (3.38) wird V_0 bei rein imaginären Argumenten gebraucht; dafür erhält man (hier seien p und p' reell):

$$V_0(p', ip) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{2p'p} \arctan \frac{2p'p}{p'^2 - p^2 + \mu^2} , \quad p' \neq 0 \neq p , \quad (3.41)$$

$$V_0(0, ip) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu^2 - p^2} , \quad (3.42)$$

$$V_0(ip', ip) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{4p'p} \ln \frac{\mu^2 - p'^2 - p^2 + 2p'p}{\mu^2 - p'^2 - p^2 - 2p'p} , \quad p' \neq 0 \neq p . \quad (3.43)$$

Das volle spinabhängige Potential mit attraktivem und repulsivem Anteil, das in die UPA-Rechnung gesteckt wird, hat die Form:

$$\langle \vec{r}' s'_m s'_t t'_m t'_t | V | \vec{r} s_m s_t t_m t_t \rangle = \delta_{SS} \delta_{m'_S m_S} \delta_{t'_t t_t} \delta_{m'_t m_t} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \quad (3.44)$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^2 \frac{\lambda_{S\nu}}{\mu_{S\nu}} \frac{e^{-\mu_{S\nu} r}}{r} .$$

Die Parameter für das MT-I-Potential (Singulettssystem) und für das MT-III-Potential (Triplettssystem) sind in Tabelle 3.2 aufgelistet; zusätzlich werden die Streulänge a_s , die effektive Reichweite r_s und die Energien E_s (E_{Deut} bzw. E_{Anti}) angegeben. Wie beim Yamaguchi-Potential im vorhergehenden Abschnitt, ist auch dieses MT-Potential im Singulettssystem nicht ladungsabhängig.

Potential	s	λ_{s1}	λ_{s2}/MeV	$\frac{fm}{\mu_{s1}}$	$\frac{fm}{\mu_{s2}}$	a_s/fm	r_s/fm	E_s/MeV
MT-I	0	-19,5719	109,605	0,643087	0,321543	-23,78	+2,88	-0,0656
MT-III	1	-23,8775	109,605	0,643087	0,321543	5,49	1,82	-2,272

Tabelle 3.2: Parameter des MT-Potentiales

In den Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigt jeweils die Kurve 2 die mit diesen Parametern berechneten Formfaktoren; zum besseren Vergleich sind die auf 1 bei $p=0$ normierten Funktionen $\tilde{\chi}_s(p) = \frac{\chi_s(p)}{\chi_s(0)}$ dargestellt. Der Unterschied zu den Yamaguchi-Formfaktoren wird deutlich: Die UPA-Formfaktoren haben sowohl für $s=0$ wie auch für $s=1$ einen Nulldurchgang. Das Potential hat somit Bereiche, in denen es repulsiv ist. In den Abbildungen 3.3 und 3.4 sind die Streuphasen dargestellt. Im Gegensatz zum Yamaguchi-Potential gibt es, wie es bei einer realistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung mit "hard-core" sein soll, für das MT-Potential Nulldurchgänge der Streuphasen. Zwar ist dies beim UPA-Potential zum MT-Potential nicht der Fall, hier sind dennoch die Streuphasen über einen weiteren Bereich besser als beim Yamaguchi-Potential.

Die Streulänge zum MT-Potential ist gemäß Tabelle 3.2 fest. Da in dieser Arbeit untersucht werden soll, wie der Neutron-

Deuteron-Aufbruchwirkungsquerschnitt von der n-n- bzw. n-p-Streulänge im Singulett-System abhängt, mußte also eine Menge von Potentialen konstruiert werden, die die verschiedenen Streulängen liefern. Dies wurde durch Variation des Stärkeparameters des attraktiven Teiles λ_{01} erreicht; dies ist ja auch genau der einzige Parameter, der das Singulett- vom Triplett-Potential unterscheidet. In Tabelle 3.3 sind zu den verschiedenen Stärkeparametern λ_{01} des Singulett-Potentials (λ_{02}, μ_{01} und μ_{02} sind also wie in Tabelle 3.2) die Streulänge a_0 , effektive Reichweite r_0 und die Energie des Anti-boundstates E_{Anti} aufgeführt. Die ersten drei Zeilen der

λ_{01}/MeV	a_0/fm	r_0/fm	$E_{\text{Anti}}/\text{keV}$
-19,36	-17,72	2,94	-114,0
-19,393	-18,45	2,93	-105,6
-19,42	-19,08	2,92	- 99,0
-19,5599	-23,33	2,89	- 68,0
-19,5719	-23,78	2,88	- 65,6
-19,5839	-24,24	2,88	- 63,3

Tabelle 3.3: Parameter für verschiedene MT-I-Potentiale

Tabelle 3.3 geben verschiedene Daten für das n-n-Singulett-Potential, die letzten drei Zeilen verschiedene Daten für das n-p-Singulett-Potential an.

4. Dreinukleonenpotential

In diesem Kapitel wird die Wechselwirkung, die im Drei-Nukleonen-System zu den drei Paarwechselwirkungen hinzukommt, eingeführt. Ein solches Dreinukleonenpotential ist in [Coo 79, Coo 81] aus einem Off-shell-Modell für die π -N-Streuung abgeleitet worden, das auf Stromalgebra und einer dispersionstheoretischen Axialvektoramplitude beruht, welche durch die $\Delta(1230)$ -Resonanz dominiert wird. Dieses Dreinukleonenpotential ist schon in verschiedenen Triton-Rechnungen benutzt worden [Tor 81, Car 81, Glö 82, Mus 82, Wir 82, Böm 83]. Da dieses Dreinukleonenpotential Tensoranteile enthält, ist es nicht zu dem im letzten Abschnitt gewählten separablen Zweinukleonenpotential kompatibel, das nur in s-Wellen wirkt. Daher soll also nicht das volle spin- und isospinabhängige Dreinukleonenpotential benutzt werden, sondern das durch Mittelung mit einem total-antisymmetrischen Spin-Isospin-Zustand gebildete Dreinukleonenpotential [Bra 82]. Für das Triton ist dies eine gute Näherung, da es sich zu 90% in diesem Zustand befindet. Zum gemittelten Dreinukleonenpotential wird die Partialwellenentwicklung durchgeführt, die dabei auftretenden Integrale analytisch ausgeführt, soweit dies möglich ist, und das singuläre Verhalten der Partialwellenanteile diskutiert.

4.1 Spin- Isospin-Mittelung des Dreinukleonenpotentials

Das Dreinukleonenpotential W setzt sich, wie die Feynman-Diagramme in Abbildung 4.1 zeigen, aus drei Anteilen zusammen. Es ist durch den Austausch zweier Pionen gegeben, der schraffierte Bereich

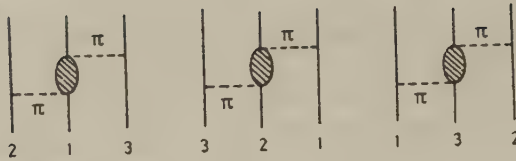


Abbildung 4.1: Feynman-Diagramme für das 2π -Austausch-3N-Potential

in dieser Abbildung stellt die Anregungen des Nukleons dar, enthält aber nicht die freie Nukleonenpropagation, weil dies ein Beitrag zum Zweinukleonenpotential ist. Wenn man den Anteil des Dreinukleonenpotential, bei dem das Nukleon i das mittlere ist, mit W_i bezeichnet, dann läßt sich W mit den zyklischen Permutationen so angeben:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = W_1 + P_{231} W_1 P_{312} + P_{312} W_1 P_{231}. \quad (4.1)$$

Für W_1 ist in Gleichung (2.43) in [Coo 81] angegeben:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}'_1 \vec{k}'_2 \vec{k}'_3 | W_1 | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \rangle &= \delta(\vec{P}' - \vec{P}) \frac{g^2}{(2\pi)^6 4m^2} \frac{H(Q^2)}{Q^2 + \mu^2} \frac{H(Q'^2)}{Q'^2 + \mu^2} \cdot \left\{ \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_3 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 \vec{Q}' \cdot \right. \\ &\cdot [a + b \vec{Q} \cdot \vec{Q}' + c(Q^2 + Q'^2) + d \vec{k}'_1 \cdot \vec{k}_1] + i \vec{\tau}_3 \times \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_1 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{Q} \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{Q}' \\ &\cdot [(d_1 + d_2)(k_2^2 - k_1^2 + k_3^2 - k_3^2) + (d_1 - d_2)(\vec{k}'_1 + \vec{k}_1) \cdot (\vec{Q} + \vec{Q}')] \\ &\left. + \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_1 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{Q} \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{Q}' \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{Q} \times \vec{Q}') (d_2 + d_4) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Für die π -N-Kopplungskonstante ist der Wert $\frac{g^2}{4\pi} = 14,4$ genommen worden. Die Nukleonenmasse m ist durch $\frac{\hbar^2}{m} = 41.47 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2$ festgelegt. Der Pionformfaktor wird durch

$$H(Q^2) = \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\Lambda^2 + Q^2} \right)^2 \quad (4.3)$$

parametrisiert; dabei ist μ die Pionenmasse (es sei μ^2

$= 0,50036 \text{ fm}^2$) und Λ die Cut-off-Masse, die auf Grund der Goldberger-Treimann-Diskrepanz abgeschätzt werden kann [Coo 81]. Hier soll mit $\Lambda^2 = 25 \text{ fm}^{-2}$ gerechnet werden; dieser Wert ist konsistent mit den OBEP-Modellen für die N-N-Wechselwirkung [Hol 81]. Die Impulsüberträge $\vec{Q}$ und $\vec{Q}'$ sind in den Gleichungen

$$\vec{Q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{p} - \vec{p}' - \frac{1}{2} (\vec{q} - \vec{q}') \quad (4.4)$$

und

$$\vec{Q}' = \vec{k}_1' - \vec{k}_2' = \vec{p} - \vec{p}' + \frac{1}{2} (\vec{q} - \vec{q}') \quad (4.5)$$

durch die Jacobi-Impulse zum System 1 $\vec{p}$ und $\vec{q}$, bzw. $\vec{p}'$ und $\vec{q}'$ (siehe Kapitel 2) festgelegt. In [Coo 81] wird gezeigt, daß die Terme mit den Koeffizienten d , d_1 und d_2 vernachlässigbar sind; sie werden deshalb auch hier weggelassen. Wie in [Coo 81] und [Bra 82] sollen hier die folgenden Stärkeparameter benutzt werden:

$$a = 1.13 \mu^{-1}, \quad b = -2.58 \mu^{-3}, \quad c = 1.00 \mu^{-3}, \quad d_3 = -0.148 \mu^{-3}, \quad d_4 = -0.605 \mu^{-3}. \quad (4.6)$$

Wie schon angedeutet worden ist, soll nicht mit dem vollen Dreikukleonenpotential W gerechnet werden, da dies wegen der Tensoranteile nicht kompatibel zur reinen s-Wellen-Wechselwirkung im Zwei-Nukleonen-System wäre, sondern wie bei Brandenburg [Bra 82] mit dem total-antisymmetrischen Spin-Isospin-Zustand zum Gesamtspin $S=\frac{1}{2}$

$$|\Xi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\frac{1}{2} M_s, 0\frac{1}{2} M_T\rangle - |0\frac{1}{2} M_s, 1\frac{1}{2} M_T\rangle \right) \quad (4.7)$$

gemittelt werden. Da $|\Xi_a\rangle$ Eigenzustand zum Gesamtspin $S=\frac{1}{2}$ ist, bedeutet dies, daß das gemittelte Dreinukleonenpotential nur im Dublett-System wirkt. Zur Vereinfachung der Notation führe ich die folgende Schreibweise ein:

$$|\Xi_a\rangle = \sum_{st} a_{st}^S |s S M_s t \frac{1}{2} M_T\rangle \quad (4.8)$$

mit

$$a_{st}^S = \langle s S M_s t \frac{1}{2} M_T | \Xi_a \rangle = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } s=1, t=0, S=\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } s=0, t=1, S=\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Aus der Normierung von $|\Xi_a\rangle$ folgt:

$$\langle \Xi_a | \Xi_a \rangle = 1 = \sum_{st} (a_{st}^S)^2 \quad (4.10)$$

Nun werden die Matrixelemente des gemittelten Dreinukleonenpotentials $\bar{W}_A$ durch

$$\delta(\vec{p}' - \vec{p}) \langle \vec{p}' \vec{q}' | \bar{W}_A | \vec{p} \vec{q} \rangle = \langle \vec{k}'_1 \vec{k}'_2 \vec{k}'_3 | \Xi_a | W_A | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \Xi_a \rangle \quad (4.11)$$

gegeben, und es folgt aus (4.2) die Form

$$\bar{W}_A(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}) = \langle \vec{p}' \vec{q}' | \bar{W}_A | \vec{p} \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{g^2}{4m^2} \frac{H(Q^2)}{Q^2 + \mu^2} \frac{H(Q'^2)}{Q'^2 + \mu^2} \quad (4.12)$$

$$\cdot \left[(a + b \vec{Q} \cdot \vec{Q}' + c(Q^2 + Q'^2)) S_1(\vec{Q}, \vec{Q}') + (d_3 + d_4) S_2(\vec{Q}, \vec{Q}') \right].$$

Hier ist also $d=d_1=d_2=0$ gesetzt worden.

Für die Spin-Isospin-Matrixelemente $S_1(\vec{Q}, \vec{Q}')$ und $S_2(\vec{Q}, \vec{Q}')$ ergibt sich nach der Rechnung in Anhang B:

$$S_1(\vec{Q}, \vec{Q}') = \langle \Xi_a | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{Q} \cdot \vec{Q}' | \Xi_a \rangle = - \vec{Q} \cdot \vec{Q}', \quad (4.13)$$

$$S_2(\vec{Q}, \vec{Q}') = \langle \Xi_a | \vec{\tau}_3 \times \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{Q} \cdot \vec{Q}' \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{Q} \times \vec{Q}' | \Xi_a \rangle = 2[\vec{Q}' \cdot \vec{Q}' - (\vec{Q} \cdot \vec{Q}')] \quad (4.14)$$

Die so gefundene Funktion $\bar{W}_4(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})$ ist die Fourier-transformierte der Ortsraumform des Dreinukleonenpotentials. Im Ortsraum ist das Dreinukleonenpotential im Gegensatz zu (4.12) lokal, kann daher graphisch dargestellt werden [Bra 82]. Je nach Stellung der Nukleonen zueinander, kann es attraktiv oder repulsiv sein; mit kleiner werdenden Abständen wird es immer stärker; bei Abständen, die größer als 3 fm sind, ist es schon vernachlässigbar klein. Wenn die drei Nukleonen auf einer Geraden liegen, wirkt das Dreinukleonenpotential repulsiv, bilden sie ein spitzwinkliges Dreieck, ist es attraktiv. Wird das Zweinukleonenpotential hinzugenommen, ändert sich das Bild ein wenig: das gesamte Potential ist nun attraktiv, wenn die Nukleonen etwa ein gleichzeitiges Dreieck bilden und es bleibt repulsiv, wenn sie auf einer Geraden liegen. Entscheidend ist, daß das Zweinukleonenpotential mit seinem "hard-core" in dem Bereich, wo das Dreinukleonenpotential sehr attraktiv ist, durch starke Repulsion überwiegt.

Es muß nun der Zusammenhang zwischen dem Operator V_4 , der im Hamiltonoperator (siehe Gl. (2.27) und (2.28)) für das Dreinukleonenpotential steht, und der durch die Mittelung gewonnenen

Funktion $\bar{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})$ hergestellt werden. Der Operator

$$v_4 = \Pi_a W \Pi_a \quad (4.15)$$

mit dem Projektor

$$\Pi_a = \int |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \xi_a\rangle \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \xi_a| d^3(k_1 k_2 k_3) \quad (4.16)$$

hat bezüglich des Zustandes $|\xi_a\rangle$ genau das gewünschte Matrixelement

$$\langle \vec{k}'_1 \vec{k}'_2 \vec{k}'_3 \xi_a | v_4 | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \xi_a \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \bar{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}), \quad (4.17)$$

und bezüglich der Zustände $|p\rangle = |s S M_s t T M_T\rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}'_1 \vec{k}'_2 \vec{k}'_3 p' | v_4 | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 p \rangle = & \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{SS'} \delta_{S'_2} \delta_{M'_s M_s} \delta_{TT} \delta_{M'_T M_T} \\ & \cdot a_{s't'}^S a_{st}^S \bar{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang, und mit dem so definierten v_4 ergibt sich analog zu (4.1) das volle Dreinukleonenpotential

$$V_4 = v_4 + P_{231} v_4 P_{312} + P_{312} v_4 P_{231} \quad (4.19)$$

Wenn im Folgenden vom Dreinukleonenpotential die Rede ist, sei also immer das so definierte v_4 bzw. V_4 gemeint. Aus der Definition (4.9) für die Koeffizienten a_{st}^S folgt, daß nach (4.18) nur die Matrixelemente von v_4 bzw. V_4 zum Gesamtspin $S = \frac{1}{2}$ nicht verschwinden.

4.2 Partialwellenentwicklung des Dreinukleonenpotentials

Da die Faddeev-Gleichungen, die das Drei-Nukleonen-System beschreiben (siehe unten), nach der Drehimpulszerlegung eine hand-

liche Form haben, werden die Partialwellenanteile des Dreinukleonenpotentials $\overline{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})$ gebraucht. Die in $\overline{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})$ auftretenden Winkel sind durch

$$x_1 = (\vec{p} - \vec{p}') \cdot (\vec{q} - \vec{q}') , \quad (4.20)$$

$$x_2 = \hat{p}' \cdot \hat{p} , \quad (4.21)$$

und $x_3 = \hat{q}' \cdot \hat{q} \quad (4.22)$

gegeben. Die Abhängigkeit von den Impulsbeträgen ist durch

$$A_2 = |\vec{p} - \vec{p}'| = \sqrt{p'^2 + p^2 - 2pp'x_2} \quad (4.23)$$

und $A_3 = |\vec{q} - \vec{q}'| = \sqrt{q'^2 + q^2 - 2qq'x_3} \quad (4.24)$

festgelegt. Die Produkte der Impulsüberträge, die in (4.12),

(4.13) und (4.14) vorkommen, lassen sich so schreiben:

$$Q^2 = A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 - A_2 A_3 x_4 , \quad (4.25)$$

$$Q'^2 = A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + A_2 A_3 x_4 , \quad (4.26)$$

$$Q^2 + Q'^2 = 2 \left(A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 \right) , \quad (4.27)$$

$$Q^2 Q'^2 = \left(A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 \right)^2 - A_2^2 A_3^2 x_4^2 , \quad (4.28)$$

$$\vec{Q} \cdot \vec{Q}' = A_2^2 - \frac{1}{4} A_3^2 . \quad (4.29)$$

Man sieht also, daß $\overline{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})$ explizit nur von x_1 , A_2 und A_3 abhängt, und daß die Abhängigkeit von x_2 und x_3 und von den Impulsbeträgen p' , q' , p und q implizit in x_1 , A_2 und A_3 steckt.

Es ist daher sinnvoll zu schreiben:

$$\overline{W}_1(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}) = v(x_1, A_2, A_3) . \quad (4.30)$$

Setzt man die Gl. (4.25) bis (4.29) in (4.12) ein, erhält man:

$$v(x_1, A_2, A_3) = \int_0 \frac{Z_0(A_2, A_3) + x_1^2 Z_2(A_2, A_3)}{N(x_1, A_2, A_3)} \quad (4.31)$$

mit

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{g^2}{4m} (\Lambda^2 - \mu^2)^4, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} Z_0(A_2, A_3) = & -(b+2c) A_2^4 + (-b+2c) \cdot \frac{1}{16} A_3^4 \\ & + \left(\frac{1}{2} b + 2(d_3+d_4) \right) A_2^2 A_3^2 - a \left(A_2^2 - \frac{1}{4} A_3^2 \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$Z_2(A_2, A_3) = -2(d_3+d_4) A_2^2 A_3^2, \quad (4.34)$$

und

$$\begin{aligned} N(x_1, A_2, A_3) = & \left[\left(A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + \Lambda^2 \right)^2 - A_2^2 A_3^2 x_1^2 \right]^2 \\ & \cdot \left[\left(A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + \mu^2 \right)^2 - A_2^2 A_3^2 x_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Partialwellenanteile $v_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})$ des Dreinukleonenpotentials sind durch

$$v(x_1, A_2, A_3) = \sum_{\ell' \lambda' \ell \lambda L} v_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}) Y_{\ell' \lambda' L M}(\vec{p}', \vec{q}') Y_{\ell \lambda L M}^*(\vec{p}, \vec{q}) \quad (4.36)$$

mit

$$\begin{aligned} v_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}) = & \delta_{L L} \delta_{M M} \langle \vec{p}' \vec{q}' \ell' \lambda' L M | \bar{w}_1 | \vec{p} \vec{q} \ell \lambda L M \rangle \\ = & \int v(x_1, A_2, A_3) Y_{\ell' \lambda' L M}^*(\vec{p}', \vec{q}') Y_{\ell \lambda L M}(\vec{p}, \vec{q}) d(\vec{p} \vec{q}' \vec{p} \vec{q}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

gegeben. Man geht nun folgendermaßen vor. Zuerst wird $v(x_1, A_2, A_3)$ bezüglich x_1 nach den Legendre-Polynomen $P_\ell(x_1)$ entwickelt:

$$v(x_1, A_2, A_3) = \sum_{\ell_1} (2\ell_1+1) S_{\ell_1}(A_2, A_3) P_{\ell_1}(x_1) \quad (4.38)$$

mit

$$S_{\ell_1}(A_2, A_3) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x_1, A_2, A_3) P_{\ell_1}(x_1) dx_1. \quad (4.39)$$

Da gemäß (4.31) und (4.35) x_1 in $v(x_1, A_2, A_3)$ nur als Quadrat auftritt und $v(x_1, A_2, A_3)$ somit bezüglich x_1 eine gerade Funktion ist, verschwinden die Integrale (4.39) zu ungeradem ℓ_1 ,

und in der Summe (4.38) tragen nur gerade l_1 bei.

Bevor man die rechte Seite von (4.38) bezüglich x_2 und x_3 nach Legendre-Polynomen entwickelt, muß die Abhängigkeit in x_1 von x_2 und x_3 herausgeholt werden:

$$P_{l_1}(x_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{2l_1+1}} (-1)^{l_1} Y_{l_1,0,0}(\hat{\vec{p}}-\hat{\vec{p}}', \hat{\vec{q}}-\hat{\vec{q}}') = \frac{4\pi}{\sqrt{2l_1+1}} (-1)^{l_1} \frac{1}{A_2^{l_1} A_3^{l_1}} \cdot \sum_{\substack{r_1+r_2=l_1 \\ s_1+s_2=l_1}} F_{r_1 r_2}(p_1-p') F_{s_1 s_2}(q_1-q') \left[Y_{r_1 r_2 l_1}(\hat{p}, \hat{p}') Y_{s_1 s_2 l_1}(\hat{q}, \hat{q}') \right]_{00}. \quad (4.40)$$

Dabei wurden die Formeln (A.8) und (A.9) des Anhanges benutzt.

Es folgt daraus, daß die Abhängigkeit in $v(x_1, A_2, A_3)$ von x_2 und x_3 , die implizit in A_2 und A_3 steckt (vergleiche (4.23) und (4.24)), die Form hat:

$$\frac{S_{l_1}(A_2, A_3)}{(A_2 A_3)^{l_1}} = \sum_{l_2, l_3} (2l_2+1)(2l_3+1) v_{l_1, l_2, l_3}(p', q', p, q) P_{l_2}(x_2) P_{l_3}(x_3) \quad (4.41)$$

mit

$$v_{l_1, l_2, l_3}(p', q', p, q) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{S_{l_1}(A_2, A_3)}{(A_2 A_3)^{l_1}} P_{l_2}(x_2) P_{l_3}(x_3) dx_2 dx_3. \quad (4.42)$$

Analog zu $P_{l_1}(x_1)$ schreibt man die Legendre-Polynome $P_{l_2}(x_2)$ und $P_{l_3}(x_3)$ in gekoppelte Kugelfunktionen um und erhält:

$$\begin{aligned} \bar{W}_{l_1}(\hat{p}', \hat{q}', \hat{p}, \hat{q}) &= v(x_1, A_2, A_3) = \\ &= (4\pi)^3 \sum_{l_2, l_3} \sqrt{(2l_2+1)(2l_3+1)} (-1)^{l_1+l_2+l_3} \\ &\cdot v_{l_1, l_2, l_3}(p', q', p, q) \sum_{\substack{r_1+r_2=l_1 \\ s_1+s_2=l_1}} F_{r_1 r_2}(p_1-p') F_{s_1 s_2}(q_1-q') X_{00} \end{aligned} \quad (4.43)$$

mit

$$X_{00} = \left[\left[Y_{r_1 r_2 l_1}(\hat{p}, \hat{p}') Y_{s_1 s_2 l_1}(\hat{q}, \hat{q}') \right]_0 \left[Y_{l_2, l_2, 0}(\hat{p}, \hat{p}') Y_{l_3, l_3, 0}(\hat{q}, \hat{q}') \right]_0 \right]_{00}. \quad (4.44)$$

Die radiale Abhängigkeit in $\psi(x_1, A_2, A_3)$ ist somit völlig von der Winkelabhängigkeit, die in X_{00} steckt, getrennt und man hat in (4.37) nach Einsetzen von (4.44) die folgende Integration auszuführen:

$$\int X_{00} \psi_{\ell' \lambda' \ell' M'}^* (\hat{p} \hat{q}) \psi_{\ell \lambda \ell M} (\hat{p} \hat{q}) d(\hat{p} \hat{q} \hat{p} \hat{q}). \quad (4.45)$$

Dieses Integral wird in Anhang C berechnet. Als Endergebnis erhält man

$$\begin{aligned} \psi_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}(\hat{p}, \hat{q}, \hat{p}, \hat{q}) &= \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} G_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}^{\ell_1} \psi_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}(\hat{p}, \hat{q}, \hat{p}, \hat{q}) \\ &\cdot \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \ell_1} B_{\ell' \lambda' \ell}^{\ell_1 \ell_2 \gamma_1 \gamma_2} p^{\gamma_1} p^{\gamma_2} \cdot \sum_{s_1 + s_2 = \ell_1} B_{\lambda' \lambda}^{\ell_1 \ell_2 s_1 s_2} q^{s_1} q^{s_2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

mit den Geometriekoeffizienten

$$G_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}^{\ell_1} = (4\pi)^2 (2\ell_1 + 1) (-1)^{\ell_1 + \ell' + \lambda' + L} \left\{ \begin{matrix} \ell & \ell' & \ell_1 \\ \lambda & \lambda & L \end{matrix} \right\}, \quad (4.47)$$

$$B_{\ell' \lambda' \ell}^{\ell_1 \ell_2 \gamma_1 \gamma_2} = \delta_{\lambda, \gamma_1 + \gamma_2} (2\ell_2 + 1) \sqrt{\frac{(2\ell_1)}{(2\gamma_1)}} \langle \gamma_1 0 \ell_2 0 | \ell 0 \rangle \langle \gamma_2 0 \ell_2 0 | \ell' 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} \ell & \ell' & \ell_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \ell_2 \end{matrix} \right\} \quad (4.48)$$

und

$$B_{\lambda' \lambda}^{\ell_1 \ell_2 s_1 s_2} = \delta_{\lambda, s_1 + s_2} (2\ell_2 + 1) \sqrt{\frac{(2\ell_1)}{(2s_1)}} \langle s_1 0 \ell_2 0 | \lambda 0 \rangle \langle s_2 0 \ell_2 0 | \lambda' 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} \lambda & \lambda' & \ell_1 \\ s_2 & s_1 & \ell_2 \end{matrix} \right\}. \quad (4.49)$$

Die Dreiecksungleichungen, die aus den Clebsch-Gordon- und 6-j-Koeffizienten folgen, sorgen dafür, daß alle Summen in (4.46) abbrechen. Wegen des 6-j-Koeffizienten in (4.47) folgt, daß für ℓ_1 gelten muß:

$$0 \leq \ell_1 \leq \min \{ \ell + \ell', \lambda + \lambda' \}. \quad (4.50)$$

Da die Summationsindices $l_1, l_2, l_3, r_1, r_2, s_1$ und s_2 durch l_1 nach oben beschränkt sind, ergibt sich bei vorgegebenen Werten für l', l, λ' und λ aus den Clebsch-Gordon-Koeffizienten in (4.48) und (4.49):

$$0 \leq l_2 \leq \min \{l, l'\} + \frac{1}{2} (|l - l'| + l_1) \quad (4.51)$$

und

$$0 \leq l_2 \leq \min \{\lambda, \lambda'\} + \frac{1}{2} (|\lambda - \lambda'| + l_1) \quad (4.52)$$

Da die Summe der drei Drehimpulse in Clebsch-Gordon-Koeffizienten mit verschwindenden magnetischen Quantenzahlen immer gerade sein muß, können weitere Schlüsse gezogen werden. Wegen (4.48) und (4.49) hat man, wenn berücksichtigt wird, daß $r_1 + r_2 = s_1 + s_2 = l_1$ immer gerade ist: $1 = (-1)^{r_1 + l_2 + l + r_2 + l_2 + l'} = (-1)^{l + l'}$ und $1 = (-1)^{s_1 + l_2 + \lambda + s_2 + l_2 + \lambda'} = (-1)^{\lambda + \lambda'}$. Das bedeutet also, daß nicht nur die Gesamtparität erhalten ist $(-1)^{l + l'} = (-1)^{l + \lambda}$ sondern auch die Parität im Subsystem und die des dritten Nukleons:

$$(-1)^l = (-1)^{l'}, \quad (-1)^\lambda = (-1)^{\lambda'} \quad (4.53)$$

Eine weitere wichtige Gleichung läßt sich aus (4.46) bis (4.49) ableiten; es gilt die Symmetrie:

$$v_{l'\lambda' l \lambda L} (p', q', p, q) = v_{l \lambda l' \lambda' L} (p, q, p', q') \quad (4.54)$$

Beachtet man die Beziehungen (4.50) bis (4.54), so kann man bei der numerischen Berechnung der Partialwellenanteile einiges an Speicherplatz und an Rechenzeit einsparen.

4.3 Durchführung der Winkelintegrationen

Das entscheidende Problem bei der Berechnung der Partialwellenanteile $v_{\ell\lambda'\ell\lambda L}$ des Dreinukleonenpotentials sind die Winkelintegrationen in (4.39) und (4.42), also die Integrale über x_1 , x_2 und x_3 . Es wird gezeigt, daß die x_1 -Integration analytisch ausgeführt werden kann. Die beiden anderen Integrationen müssen numerisch behandelt werden; die dabei auftretenden Schwierigkeiten infolge von Singularitäten in der Nähe des Integrationsbereiches müssen diskutiert werden.

Mit Hilfe der Legendre-Funktion 2. Art, die für Argumente $a > 1$ durch

$$Q_k(a) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_k(x) dx}{a - x} \quad (4.55)$$

definiert ist, lassen sich die folgenden Integrale angeben:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_k(x) dx}{a^2 - x^2} = \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{1}{a} Q_k(a), \quad (4.56)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_k(x) dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1 + (-1)^k}{2} \left[\frac{1}{2a^3} Q_k(a) - \frac{1}{2a^2} Q_k'(a) \right]. \quad (4.57)$$

Dabei sei $Q_k'(a) = \frac{d}{da} Q_k(a)$ die Ableitung von $Q_k(a)$.

Man kann (4.39) so umformen, daß nur Integrale der Form (4.56) oder (4.57) auftreten. Um dies zu erreichen, muß $\frac{1}{N(x_1, A_2, A_3)}$ in Partialbrüche zerlegt werden; dies ist nur möglich, wenn

$A_2 \neq 0$ und $A_3 \neq 0$ ist. Die Fälle mit $A_2=0$ oder $A_3=0$ sollen anschließend behandelt werden. Zur Abkürzung werde definiert:

$$B_\Lambda^2 = A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + \Lambda^2, \quad B_\mu^2 = A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + \mu^2, \quad (4.58)$$

Dann erhält man aus (4.35) die Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(x_1, A_2, A_3)} &= \frac{1}{(A_2 A_3)^6} \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{B_\Lambda^2}{A_2 A_3}\right)^2 - x_1^2\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3}\right)^2 - x_1^2} \\ &= \frac{1}{(B_\Lambda^4 - B_\mu^4)^2 A_2^2 A_3^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{B_\mu^2}{A_2^2 A_3^2}\right)^2 - x_1^2} - \frac{1}{\left(\frac{B_\Lambda^2}{A_2^2 A_3^2}\right)^2 - x_1^2} \\ &\quad - \frac{1}{B_\Lambda^4 - B_\mu^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{B_\Lambda^2}{A_2 A_3}\right)^2 - x_1^2} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Es gilt hier:
$$B_\Lambda^4 - B_\mu^4 = (B_\Lambda^2 + B_\mu^2) (\Lambda^2 - \mu^2). \quad (4.60)$$

Nun muß noch das Produkt $x_1 P_{\ell_1}(x_1)$, das im Zähler von $v(x_1, A_2, A_3)$ steht (siehe Gleichung (4.31)), nach Legendre-Polynomen entwickelt werden. Aus

$$x_1^2 = \frac{1}{3} (P_0(x_1) + 2 P_2(x_1)) \quad (4.61)$$

und
$$P_{j_1}(x_1) P_{j_2}(x_1) = \sum_{k=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 0 j_2 0 | k 0 \rangle^2 P_k(x_1) \quad (4.62)$$

folgt

$$x_1^2 P_{\ell_1}(x_1) = \frac{1}{3} P_{\ell_1}(x_1) + \frac{2}{3} \sum_{k=|\ell_1-2|}^{\ell_1+2} \langle \ell_1 0 2 0 | k 0 \rangle^2 P_k(x_1). \quad (4.63)$$

Da ℓ_1 gerade ist, kann wegen des Clebsch-Gordan-Koeffizienten k nur die Werte $\ell_1, \ell_1 \pm 2$ annehmen. Mit (4.59) und (4.63) wird $v(x_1, A_2, A_3)$ in die gewünschte Form gebracht, so daß mit (4.56) und (4.57) das Integral (4.39) angegeben werden kann. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned}
 S_{\ell_n}(A_2, A_3) = & \frac{1}{(B_\mu^2 + B_\lambda^2)^2 (\lambda^2 - \mu^2)^2 A_2 A_3 B_\mu^2} \left[Z_{02}(A_2, A_3) Q_{\ell_n} \left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2}{3} Z_2(A_2, A_3) \sum_k \langle \ell_n 0 2 0 | k 0 \rangle^2 Q_k \left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3} \right) \right] \\
 & - \frac{1}{(B_\mu^2 + B_\lambda^2) (\lambda^2 - \mu^2) A_2 A_3 B_\lambda^2} \left[\frac{1}{(B_\mu^2 + B_\lambda^2) (\lambda^2 - \mu^2)} + \frac{1}{2 B_\lambda^4} \right] \left[Z_{02}(A_2, A_3) Q_{\ell_n} \left(\frac{B_\lambda^2}{A_2 A_3} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2}{3} Z_2(A_2, A_3) \sum_k \langle \ell_n 0 2 0 | k 0 \rangle^2 Q_k \left(\frac{B_\lambda^2}{A_2 A_3} \right) \right] \quad (4.64) \\
 & + \frac{1}{(B_\mu^2 + B_\lambda^2) (\lambda^2 - \mu^2) \cdot 2 A_2^2 A_3^2 B_\lambda^4} \left[Z_{02}(A_2, A_3) Q'_{\ell_n} \left(\frac{B_\lambda^2}{A_2 A_3} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2}{3} Z_2(A_2, A_3) \sum_k \langle \ell_n 0 2 0 | k 0 \rangle^2 Q'_k \left(\frac{B_\lambda^2}{A_2 A_3} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$Z_{02}(A_2, A_3) = Z_0(A_2, A_3) + \frac{4}{3} Z_2(A_2, A_3) \quad (4.65)$$

gesetzt worden. Zu beachten ist, daß (4.64) nur für gerade ℓ_n -Werte gebraucht wird.

Die Gleichung (4.64) kann, wie schon erwähnt wurde, nur für $A_2 \cdot A_3 \neq 0$ angewandt werden. Die Spezialfälle mit $A_2=0$ oder $A_3=0$ vereinfachen sich folgendermaßen. Falls $A_2=0$ gilt (dies ist nur möglich, wenn $p=p'=0$ ist, oder wenn $p=p'$ und $x_2=-1$ ist), verschwindet die x_1 -Abhängigkeit in $\mathcal{V}(x_1, A_2 A_3)$ und mittels der Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome folgt sofort:

$$S_{\ell_n}(0, A_3) = \delta_{\ell_n 0} \int_0^1 \frac{\frac{1}{4} A_3^2 [\alpha + (2c-b) \cdot \frac{1}{4} A_3^2]}{(\frac{1}{4} A_3^2 + \lambda^2)^4 (\frac{1}{4} A_3^2 + \lambda^2)^2} \quad (4.66)$$

Analog ergibt sich für $A_3=0$:

$$S_{\ell_1}(A_2, 0) = \delta_{\ell_1 0} \cdot f_0 \frac{-A_2^2 [\alpha + (2c+b) A_2^2]}{(A_2^2 + \Lambda^2)^4 (A_2^2 + \Lambda^2)^2} \quad (4.67)$$

Falls also $p=p'=0$ oder $q'=q=0$ ist, läßt sich die Berechnung von $v_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}(p', q', p, q)$ nach (4.42) auf diese Spezialfälle zurückführen. Wegen des Kronecker-Symbols $\delta_{\ell_1 0}$ kann also der Nenner in (4.42), nämlich $\frac{1}{(A_2 A_3)^{\ell_1}}$ für $A_2 \cdot A_3=0$ nicht gefährlich werden, da nur $\ell_1=0$ beiträgt. Für $p=p'=0$ verschwindet die x_2 -Abhängigkeit des Integranden und es ergibt sich:

$$v_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}(0, q', 0, q) = \delta_{\ell_1 0} \delta_{\ell_2 0} \int_{-1}^1 S_0(0, A_3) P_{\ell_3}(x_3) dx_3 \quad (4.68)$$

In die Entwicklung für $v_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}(p', q', p, q)$ eingesetzt, folgt:

$$v_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}(0, q', 0, q) = \delta_{\ell' 0} \delta_{\lambda' L} \delta_{\ell 0} \delta_{\lambda L} \cdot (4\pi)^2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S_0(0, A_3) P_L(x_3) dx_3 \quad (4.69)$$

Analoges erhält man, falls $q=q'=0$ wird. Damit ist also gezeigt, daß das Integral (4.41) über x_2 und x_3 nicht singulär wird, falls p und p' oder q und q' gegen Null gehen.

Nun kann, wie schon gesagt, zum Beispiel A_2 zu Null werden, auch wenn $p' \neq 0 \neq p$ ist, nämlich wenn $p=p'$ und $x_2=-1$ ist. Daß auch dieser Fall harmlos ist, zeigt die nun folgende Untersuchung. Die Legendre-Funktionen haben für große positive Argumente das Verhalten:

$$Q_k(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} c_k \cdot \frac{1}{a^{k+1}} \quad (4.70)$$

und
$$Q'_k(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} -(k+1) c_k \cdot \frac{1}{a^{k+2}} \quad (4.71)$$

mit

$$c_k = \frac{(k!)^2 2^k}{(2k+1)!} \quad (4.72)$$

Nach Gl. (4.64) tritt also zum Beispiel in (4.42) dieser Term

auf: $\frac{1}{(A_2 A_3)^{\ell_1}} \cdot \frac{1}{A_2 A_3} \cdot Q_{\ell_1} \left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3} \right)$ Mit dem obigen asymptotischen Verhalten ergibt sich für $A_2 A_3 \ll B_\mu^2$:

$$\frac{1}{(A_2 A_3)^{\ell_1+1}} Q_{\ell_1} \left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3} \right) \approx \frac{c_{\ell_1}}{(B_\mu^2)^{\ell_1+1}} (A_2 A_3)^{\ell_1+1-\ell_1-1} = \frac{c_{\ell_1}}{(B_\mu^2)^{\ell_1+1}} \quad (4.73)$$

Für einen anderen Anteil von $S_{\ell_1}(A_2, A_3)$ gilt zusammen mit $\frac{1}{(A_2 A_3)^{\ell_1}}$

$$\frac{Z_2(A_2, A_3)}{(A_2 A_3)^{\ell_1+1}} Q_k \left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3} \right) \approx -2(d_3+d_4) \frac{c_k}{(B_\mu^2)^{k+1}} (A_2 A_3)^{k+1-\ell_1-1} \quad (4.74)$$

Wegen $|\ell_1-2| \leq k \leq |\ell_1+2|$ kann der Exponent $k+1-\ell_1-1$ in (4.74) nicht negativ werden. Gleiches gilt für:

$$\frac{1}{(A_2 A_3)^{\ell_1}} (A_2 A_3)^\ell Q_{\ell_1} \left(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3} \right) \approx -(\ell_1+1) \frac{c_{\ell_1}}{(B_\mu^2)^{\ell_1+2}} (A_2 A_3)^{\ell_1+2-\ell_1-2} \quad (4.75)$$

und für die restlichen Terme in (4.64). Das asymptotische Verhalten von Q_{ℓ_1} bzw. $Q_{\ell_1}^1$ sorgt also dafür, daß die Faktoren im Nenner von $\frac{S_{\ell_1}(A_2, A_3)}{(A_2 A_3)^{\ell_1}}$, die klein werden, weggekürzt werden. Daher ist der Integrand bis auf behebbare Unstetigkeitsstellen im gesamten Integrationsbereich singularitätenfrei.

Trotzdem gibt es Singularitäten, die Schwierigkeiten bei der numerischen Integration von (4.42) bereiten; dies soll nun erläutert werden. In $S_{\ell_1}(A_2, A_3)$ tritt gemäß (4.64) der Faktor

$B_\mu^2 = A_2^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + \mu^2$ im Nenner auf, der nur für $|x_2| > 1$ und $|x_3| > 1$ verschwinden kann, da μ^2 positiv ist. Dieser

Faktor kann wegen des asymptotischen Verhaltens von $Q_{1,1}(\frac{B_\mu^2}{A_2 A_3})$ (siehe bei (4.73)) auch in höheren Potenzen vorkommen. Die Gleichung

$$B_\mu^2 - p'^2 + p^2 + \frac{1}{4}(q^2 + q'^2) - 2p'p x_2 - \frac{1}{2}q'q x_3 + \mu^2 = 0 \quad (4.76)$$

legt in der x_2 - x_3 -Ebene eine Gerade fest, die immer außerhalb des Integrationsbereiches von (4.42), also des Quadrates mit $|x_2| \leq 1$ und $|x_3| \leq 1$ liegt. Da aber $\mu^2 = 0,50036 \text{ fm}^2$ relativ klein ist, kann diese Gerade sehr dicht an dieses Quadrat herankommen. Für $p=p'$, $p \gg \mu$ und $p \gg A_3$ folgt aus (4.76):

$$x_{02} = 1 + \frac{\frac{1}{4}A_3^2 + \mu^2}{2p^2} \approx 1 \quad (4.77)$$

Dieser Pol bei x_{02} macht sich, besonders wenn er von höherer Ordnung ist, im Integrationsbereich $-1 \leq x_2 \leq 1$ durch sehr starke Variation des Integranden bemerkbar und muß daher beim numerischen Berechnungsverfahren berücksichtigt werden. Auch das Verschwinden von B_Λ^2 verursacht Pole, die aber nicht so dicht an den Integrationsbereich herankommen können, da Λ^2 wesentlich größer als μ^2 ist.

Wichtig ist das Verhalten der Partialwellenanteile $\mathcal{V}_{\ell\Lambda'\ell\Lambda L}(p', q', p, q)$ bei kleinen Impulsen. Dieses Verhalten kann man durch Taylor-Entwicklung gewinnen oder, was einfacher ist, indem man $\mathcal{V}_{\ell\Lambda'\ell\Lambda L}(p', q', p, q)$ durch Fourier-Transformation aus der entsprechenden Ortsraumfunktion, wie sie in [Bra 82] angegeben ist, bestimmt. Dabei wird die Ortsraumpartialwelle zusammen mit sphärischen Besselfunktionen über die Ortskoordinaten integriert. Für p hat man ein Integral der Art $\int_0^\infty j_\ell(pr) f(r) r^2 dr$ zu berechnen. Mit dem Schwellenverhalten der sphärischen Besselfunk-

tionen

$$j_\ell(pr) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{(pr)^\ell}{(2\ell+1)!!} \quad (4.78)$$

folgt:

$$\int_0^\infty j_\ell(pr) f(r) r^2 dr \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{p^\ell}{(2\ell+1)!!} \int_0^\infty f(r) r^{\ell+2} dr. \quad (4.79)$$

Wegen des exponentiellen Abfalles von $f(r)$ in r ist das Integral in (4.79) endlich. Daraus folgt, daß die Funktion

$$\tilde{v}_{\ell'\ell\ell\ell}(\ell', q', p, q) = \frac{v_{\ell'\ell\ell\ell}(\ell', q', p, q)}{p'^{\ell'} q'^{\ell'} p^\ell q^\ell} \quad (4.80)$$

für verschwindende Impulse regulär ist.

Damit ist das Verfahren für die Berechnung der Partialwellenteile $v_{\ell'\ell\ell\ell}(\ell', q', p, q)$ aufgezeigt: Es müssen als erstes alle vorkommenden Geometrieoeffizienten $G_{\ell'\ell\ell\ell}^{\ell_1}$ und $B_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{\ell_1\ell_2\ell_3}$ angegeben werden, dann werden für alle Impulse p', q', p und q die Integrale $v_{\ell_1\ell_2\ell_3}(\ell', q', p, q)$ einmal für alle möglichen Werte von ℓ_1, ℓ_2 und ℓ_3 berechnet und die Summe (4.46) ausgeführt.

5. Faddeev-Gleichungen mit Dreinukleonenpotentialen

Nachdem in den beiden letzten Kapiteln das in dieser Arbeit benutzte Zwei- und Dreinukleonenpotential eingeführt worden ist, können nun die Gleichungen für die Amplituden, die die n-d-Reaktion beschreiben und über den Wirkungsquerschnitt die Verbindung mit dem Experiment schaffen, abgeleitet werden. Es wird wie bei der Herleitung der Alt-Grassberger-Sandhas-Gleichungen (AGS-Gleichungen) [Alt 67], die nur Zweinukleonenpotentiale enthalten, vorgegangen. Mit dem Dreinukleonenpotential ergibt sich ein Gleichungssystem für die Übergangsoperatoren, das sehr ähnlich den AGS-Gleichungen ist [Kow 76, Glö 83]. Da Protonen und Neutronen als identische Teilchen angesehen werden, muß die Antisymmetrisierung eingebaut werden, was zur Reduzierung der Zahl der gekoppelten Gleichungen führt. Nach Projektion auf die Partialwellen der Kanalzustände erhält man schließlich Integralgleichungen in einer Variablen für die Amplituden, die die Matrixelemente der Übergangsoperatoren zu den Kanalpartialwellen sind. Die im Integralkern auftretenden Singularitäten und deren Auswirkungen auf die Amplitude werden diskutiert. Zum Schluß wird die homogene Faddeev-Gleichung, die zur Bestimmung der Bindungsenergie des Dreinukleonensystemes benutzt werden kann, angegeben.

5.1 Verallgemeinerung der Faddeev-Gleichungen für Dreinukleonenpotentiale

In diesem Abschnitt wird das Gleichungssystem für die Übergangsoperatoren $U_{\beta\alpha}$ abgeleitet, die Reaktionen beschreiben, bei denen der Anfangskanal $|\Phi_\alpha\rangle$ in den Endkanal $|\Phi_\beta\rangle$ übergeht. Diese Operatoren werden durch ihre Matrixelemente zu den Kanalzuständen so

festgelegt:

$$\langle \Phi'_\beta | U_{\beta\alpha} | \Phi_\alpha \rangle = \langle \Phi'_\beta | \bar{V}_\beta | \Psi_\alpha^{(+)} \rangle = \langle \Phi'_\beta | \bar{V}_\beta \Omega_\alpha^{(+)} | \Phi_\alpha \rangle. \quad (5.1)$$

Dies ist eine on-shell-Beziehung, da die folgenden Eigenwertgleichungen erfüllt sein sollen:

$$(h_\beta - E) | \Phi'_\beta \rangle = 0, \quad (5.2)$$

$$(h_\alpha - E) | \Phi_\alpha \rangle = 0, \quad (5.3)$$

$$(H - E) | \Psi_\alpha^{(+)} \rangle = 0. \quad (5.4)$$

(Hier sind die Indizes zur Kennzeichnung der Jacobi-Koordinaten weggelassen; für $\alpha = 1, 2$ oder 3 hätte es eigentlich heißen müssen: $| \Phi_\alpha \rangle_\alpha$.)

Die on-shell-Matrixelemente beschreiben das physikalische Geschehen, da die Energie erhalten bleiben soll. Durch (5.1) sind die Operatoren noch nicht eindeutig festgelegt; eindeutig ist ein Operator erst dann bestimmt, wenn die Matrixelemente zu allen Basiszuständen des Hilbertraumes gegeben sind, dazu gehören auch die off-shell-Matrixelemente. Da es keine physikalischen Vorschriften gibt, die das off-shell-Verhalten definieren, hat man die Freiheit, dies in beliebiger Weise festzulegen. Es muß nur gewährleistet sein, daß die on-shell-Bedingung (5.1) erfüllt ist. Falls für einen Operator A die on-shell-Gleichung $\langle \Phi'_\beta | A | \Phi_\alpha \rangle = 0$ gilt, so ist

$$U_{\beta\alpha} = A + \bar{V}_\beta \Omega_\alpha^{(+)} = A + \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta G \bar{V}_\alpha \quad (5.5)$$

ein derartiger allgemeiner Übergangsoperator. Man kann nun einen solchen Operator A wählen, daß die Gleichungen für die damit definierten Operatoren $U_{\beta\alpha}$ eine besonders "schöne" Form haben.

Wie bei [Alt 67] sei für die beliebige, aber nicht positiv-reelle Energie z definiert:

$$U_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_{\alpha}^{-1}(z) + \bar{V}_{\beta} + \bar{V}_{\beta} G(z) \bar{V}_{\alpha} \quad (5.6)$$

$$\text{oder} \quad U_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_{\beta}^{-1}(z) + \bar{V}_{\alpha} + \bar{V}_{\beta} G(z) \bar{V}_{\alpha} \quad (5.7)$$

mit umgekehrtem Kroneckersymbol

$$\bar{\delta}_{\beta\alpha} = 1 - \delta_{\beta\alpha} . \quad (5.8)$$

Eine einfache Umrechnung der inversen Resolventen ergibt, daß die Ausdrücke in (5.6) und (5.7) identisch sind. On-shell, d.h. für $z = E$ gilt

$$\langle \Phi_{\beta}' | g_{\alpha}^{-1}(E) | \Phi_{\alpha} \rangle = \langle \Phi_{\beta}' | g_{\beta}^{-1}(E) | \Phi_{\alpha} \rangle = 0 . \quad (5.9)$$

Damit ist gezeigt, daß die in (5.6) bzw. (5.7) definierten Operatoren $U_{\beta\alpha}$ genau der on-shell-Bedingung (5.1) genügen. Die so definierten Übergangsoperatoren unterscheiden sich von den in [Alt 67] definierten nur dadurch, daß sie wegen

$$\bar{V}_{\beta} = \sum_{\gamma=1}^4 V_{\gamma} - V_{\beta} \quad \text{und} \quad \bar{V}_{\alpha} = \sum_{\gamma=1}^4 V_{\gamma} - V_{\alpha}$$

das Dreinukleonenpotential V_4 enthalten.

Da Prozesse untersucht werden sollen, bei denen der Anfangskanal aus einem freien Nukleon und einem Deuteron, dem gebundenen Zwei-Nukleonen-System besteht, kann die Anfangskanalnummer

α die Werte 1, 2 oder 3 haben (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\alpha=1$ gesetzt werden). Falls β ebenfalls die Werte 1, 2 oder 3 annimmt, beschreibt $U_{\beta\alpha}$ die elastische - bzw. Rearrangement-Streuung. Für $\beta=0$ sind die drei Nukleonen im Endkanal frei, $U_{0\alpha}$ beschreibt also die Aufbruchreaktion. Mit

$\bar{V}_4 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3$ wird gemäß (5.6) ein Operator $U_{4\alpha}$ definiert, der keinen physikalisch realisierbaren Prozeß beschreibt, denn es gibt keinen experimentell erzeugbaren Kanal, in dem nur das Dreinukleonenpotential V_4 , nicht aber die Zweinukleon-potentiale V_1, V_2, V_3 wirken. Wenn die drei Nukleonen so dicht beisammen sind, daß sie das Dreinukleonenpotential spüren, ist immer die Paarwechselwirkung gegenwärtig. Formal können aber zu V_4 die Streulösungen $|\Phi_4\rangle$ aus

$$h_4 |\Phi_4\rangle = (h_0 + V_4) |\Phi_4\rangle = E |\Phi_4\rangle \quad (5.10)$$

konstruiert werden. Ebenso kann durch die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$t_4(z) = V_4 + V_4 g_0(z) t_4(z) \quad (5.11)$$

eine T-Matrix definiert werden, für die

$$t_4(z) g_0(z) = V_4 g_0(z) \quad (5.12)$$

gilt.

Mit der Resolventenidentität (2.40) kann (5.6) so umgeformt werden:

$$\begin{aligned} U_{\beta\alpha} &= \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_{\beta}^{-1} + \bar{V}_{\alpha} + \sum_{\gamma=1}^4 \bar{\delta}_{\beta\gamma} V_{\gamma} (g_{\gamma} + g_{\gamma} \bar{V}_{\gamma} G) \bar{V}_{\alpha} \\ &= \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_{\beta}^{-1} + \bar{V}_{\alpha} - \sum_{\gamma=1}^4 \bar{\delta}_{\beta\gamma} V_{\gamma} \bar{\delta}_{\gamma\alpha} + \sum_{\gamma=1}^4 \bar{\delta}_{\beta\gamma} V_{\gamma} g_{\gamma} U_{\gamma\alpha} . \end{aligned}$$

Die Auswertung der Summe über die umgekehrten Kroneckersymbole und Ausnutzen von (5.12) liefert das Resultat:

$$U_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_{\beta}^{-1}(z) + \sum_{\gamma=1}^4 \bar{\delta}_{\beta\gamma} t_{\gamma}(z) g_0(z) U_{\gamma\alpha}(z); \beta=0, \dots, 4. \quad (5.13)$$

Dieses Gleichungssystem hat formal dieselbe Struktur wie die AGS-Gleichungen [Alt 67]. Der einzige Unterschied ist, daß hier die Indices bis 4 laufen, d.h.: Es gibt eine zusätzliche Gleichung und zusätzliche Operatoren $U_{4\alpha}$. Für ein gegebenes α (z.B. $\alpha = 1$) besteht das Gleichungssystem (5.13) aus vier linearen gekoppelten Gleichungen für vier Operatoren U_{11} , U_{21} , U_{31} und U_{41} ; eine weitere Gleichung verknüpft den Aufbruchoperator U_{01} mit diesen vier Operatoren. Der nicht-physikalische Operator $U_{4\alpha}$ läßt sich aus den Gleichungen für $\beta = 0, \dots, 3$ eliminieren, indem in diese Gleichungen der Ausdruck für $U_{4\alpha}$ eingesetzt wird. So ergibt sich für $\alpha = 1, 2$, oder 3:

$$U_{\beta\alpha} = \bar{\delta}_{\beta\alpha} g_0^{-1} + t_4 + \sum_{\gamma=1}^3 (\bar{\delta}_{\beta\gamma} t_\gamma + t_4 g_0 t_\gamma) g_0 U_{\gamma\alpha} \quad , \beta = 1, 2, 3 \quad (5.14)$$

und

$$U_{0\alpha} = g_0^{-1} + t_4 + \sum_{\gamma=1}^3 (t_\gamma + t_4 g_0 t_\gamma) g_0 U_{\gamma\alpha} \quad . \quad (5.15)$$

Wenn in (5.14) und (5.15) $t_4 = 0$ gesetzt wird, was bedeutet, daß das Dreinukleonenpotential nicht berücksichtigt wird, erhält man die übliche Form der AGS-Gleichungen.

5.2 Faddeev-Gleichungen für identische Teilchen

Eine Vereinfachung der Gleichungen (5.14) und (5.15) ergibt sich für identische Teilchen. In guter Näherung kann man Protonen und Neutronen als identisch ansehen. Da die Nukleonen wegen des Spins $s = \frac{1}{2}$ Fermionen sind, muß antisymmetrisiert werden. Die Übergangsamplitude für identische Teilchen ergibt sich aus (5.1), indem man statt $|\Psi_\alpha^{(s)}\rangle$ den antisymmetrisierten Streuzustand

$\mathcal{A} |\psi_\alpha^{(\epsilon)}\rangle$ nimmt und so einen neuen Übergangsoperator $T_{\beta\alpha}$ definiert:

$$\langle \phi'_\beta | T_{\beta\alpha} | \phi_\alpha \rangle = \langle \phi'_\beta | \bar{V}_\beta \mathcal{A} | \psi_\alpha^{(\epsilon)} \rangle \quad (5.16)$$

Da der Ortsanteil des Deuterons nur eine s-Welle enthält, also gerade Parität hat, und da der Spinanteil wegen $s=1$ symmetrisch und der Isospinanteil wegen $t=0$ antisymmetrisch ist, ist also der Deuteronzustand insgesamt antisymmetrisch. Daher braucht in (5.16) nicht die Summe aller sechs Permutationen genommen werden, sondern es reicht wegen

$$1 + P_{231} + P_{312} - P_{12} - P_{23} - P_{31} = (1+P)(1-P_{23}) \quad (5.17)$$

nur mit $\mathcal{A} = 1+P$ zu antisymmetrisieren. Weil nämlich zum Beispiel P_{23} mit $Q_1^{(\epsilon)}$ vertauscht, ist

$$\mathcal{A} |\psi_1^{(\epsilon)}\rangle = (1+P) Q_1^{(\epsilon)} | \phi_1 \rangle \quad (5.18)$$

total-antisymmetrisch. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die folgende Notation eingeführt:

$$(Q_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & P_{231} & P_{312} \\ P_{312} & 1 & P_{231} \\ P_{231} & P_{312} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Es gilt dann zum Beispiel:

$$1 + P = \sum_{\gamma=1}^3 Q_{\beta\gamma} = \sum_{\gamma=1}^3 Q_{\gamma\alpha} \quad (5.20)$$

Transformationen zwischen den verschiedenen Jacobi-Koordinatensystemen kann man mit

$$Q_{\beta\alpha} | \phi_\alpha \rangle = | \phi_\beta \rangle \quad (5.21)$$

bzw.

$$Q_{\beta\gamma} U_{\gamma\delta} Q_{\delta\alpha} = U_{\beta\alpha} \quad (5.22)$$

darstellen.

Mit den Permutationen $Q_{\beta\alpha}$ lassen sich die symmetrisierten Übergangsoperatoren, wie sie in (5.16) on-shell definiert sind, so schreiben ($\alpha=1,2$ oder 3 und $\beta=1,2$ oder 3):

$$\begin{aligned} \langle \Phi' | T_{\beta\alpha} | \Phi \rangle_\alpha &= \sum_{\gamma=1}^3 \langle \Phi' | \bar{V}_\beta Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha}^{(+)} | \Phi \rangle_\alpha = \sum_{\gamma=1}^3 \langle \Phi' | Q_{\beta\gamma} U_{\gamma\alpha} | \Phi \rangle_\alpha \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 \langle \Phi' | \bar{V}_\beta Q_{\gamma\alpha} Q_{\gamma\alpha}^{(+)} | \Phi \rangle_\alpha = \sum_{\gamma=1}^3 \langle \Phi' | U_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} | \Phi \rangle_\alpha. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Durch (5.16) bzw. (5.23) ist nur das on-shell-Verhalten von $T_{\beta\alpha}$ bestimmt. Mit der Definition

$$T_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma=1}^3 Q_{\beta\gamma} U_{\gamma\alpha} = \sum_{\gamma=1}^3 U_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} \quad (5.24)$$

ist das off-shell-Verhalten von $T_{\beta\alpha}$ durch das der Operatoren $U_{\beta\gamma}$ bzw. $U_{\gamma\alpha}$ festgelegt. Analog wird der symmetrisierte Aufbruchoperator durch

$$T_{0\alpha} = (1+P) U_{0\alpha} = \sum_{\gamma=1}^3 U_{0\gamma} Q_{\gamma\alpha} \quad (5.25)$$

und der nichtphysikalische Übergangsoperator

$$T_{4\alpha} = (1+P) U_{4\alpha} = \sum_{\gamma=1}^3 U_{4\gamma} Q_{\gamma\alpha} \quad (5.26)$$

definiert. Hierbei wurde $(1+P) V_4 = V_4 (1+P)$ ausgenutzt.

Auch wenn identische Teilchen vorliegen, unterscheiden sich für $0 \neq \alpha \neq 4$ und $0 \neq \beta \neq 4$ die Operatoren $T_{\beta\alpha}$. Erst die Matrixelemente mit den entsprechenden Kanalzuständen sind wegen (5.21) und (5.22) identisch:

$$\langle \Phi' | T_{\beta\alpha} | \Phi \rangle_\alpha = \langle \Phi' | Q_{\alpha\beta} T_{\beta\alpha} Q_{\alpha\alpha} | \Phi \rangle_\alpha = \langle \Phi' | T_{\alpha\alpha} | \Phi \rangle_\alpha. \quad (5.27)$$

Aus (5.6) und (5.7) folgen die Darstellungen

$$T_{\alpha\alpha}(z) = P q_\alpha^{-1}(z) + \bar{V}_\alpha (1+P) + \bar{V}_\alpha (1+P) \hat{G}(z) \bar{V}_\alpha \quad (5.28)$$

und

$$T_{41}(z) = (1+P) g_4^{-1}(z) + \bar{V}_4 (1+P) + \bar{V}_4 (1+P) G(z) \bar{V}_1. \quad (5.29)$$

Zur Herleitung der Gleichung für T_{11} werden auch die entsprechenden Beziehungen für $T_{\beta 1}$ mit $\beta=2$ und $\beta=3$ gebraucht:

$$\begin{aligned} T_{\beta 1}(z) &= g_{\beta}^{-1}(z) \sum_{\gamma=1}^3 \bar{\delta}_{\beta\gamma} \omega_{\gamma 1} + (1+P) \bar{V}_1 + \bar{V}_{\beta} (1+P) G(z) \bar{V}_1 \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 \bar{\delta}_{\beta\gamma} \omega_{\gamma 1} g_{\beta}^{-1}(z) + \bar{V}_{\beta} (1+P) + \bar{V}_{\beta} (1+P) G(z) \bar{V}_1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 (1+P) G \bar{V}_1 &= \sum_{\gamma=2}^4 V_{\gamma} (g_{\gamma} + g_{\gamma} \bar{V}_{\gamma} G) (1+P) \bar{V}_1 \\ &= \sum_{\gamma=2}^4 t_{\gamma} g_0 T_{\gamma 1} - \sum_{\gamma=2}^4 V_{\gamma} \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\delta}_{\gamma\alpha} \omega_{\alpha 1} \\ &= P t_1 g_0 T_{11} + t_4 g_0 T_{41} - \bar{V}_1 (1+P) + P V_4 \end{aligned} \quad (5.31)$$

folgt:

$$T_{11} = P g_0^{-1} + P t_1 g_0 T_{11} + t_4 g_0 T_{41}. \quad (5.32)$$

Auf analoge Weise leitet man aus (5.25) und (5.26) die Gleichungen für T_{01} und T_{41} ab:

$$T_{01} = (1+P) g_0^{-1} + (1+P) t_1 g_0 T_{11} + t_4 g_0 T_{41} \quad (5.33)$$

und

$$T_{41} = (1+P) g_0^{-1} + (1+P) t_1 g_0 T_{11}. \quad (5.34)$$

Wie bei den Operatoren $u_{\beta\alpha}$ eliminiert man auch hier T_{41} aus den Gleichungen (5.32) und (5.34) und erhält:

$$T_{11}(z) = P g_0^{-1}(z) + (1+P) t_u(z) + [P + (1+P) t_u(z) g_0^{-1}(z)] t_u(z) g_0(z) T_{11}(z) \quad (5.35)$$

und

$$T_{01}(z) = (1+P) [t_u(z) + (1 + t_u(z) g_0(z)) t_u(z) g_0(z) T_{11}(z)]. \quad (5.36)$$

Da (5.36) nur on-shell gebraucht wird, ist der Term $(1+P) g_0^{-1}(z)$, der in (5.33) auftritt, weggelassen worden, weil er on-shell verschwindet. Mit (5.35) und (5.36) hat man die Gleichungen für identische Teilchen gefunden, die den Gleichungen (5.14) und (5.15) entsprechen; statt der drei gekoppelten Gleichungen (5.14) hat man nun nur noch eine einzige für den Operator des elastischen Überganges.

Sowohl in (5.35) als auch in (5.36) tritt das Dreinukleonenpotential in der Form $(1+P) t_u$ auf. Da nach Gleichung (4.18) der analytische Ausdruck für v_u gegeben ist, muß $(1+P) t_u$ mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung (5.12) und der Beziehung

$$(1+P) V_u = (1+P) v_u (1+P), \quad (5.37)$$

die aus (4.19) folgt, so umgeformt werden:

$$\begin{aligned} (1+P) t_u &= (1+P) V_u + (1+P) V_u g_0 t_u \\ &= (1+P) v_u (1+P) \sum_{n=0}^{\infty} [g_0 v_u (1+P)]^n. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Da nach [Bra 82] das Dreinukleonenpotential wesentlich schwächer als das Zweinukleonenpotential ist, kann man es als kleine Störung ansehen. Daher sollte die Entwicklung (5.38) sehr schnell konvergieren. Eine gute Näherung für $(1+P) t_u$ sollte demnach

schon der Born-Term $(1+P) v_u (1+P)$ sein. Ich definiere daher die Operatoren

$$C = v_u (1+P) \quad (5.39)$$

und

$$D = (1+P) v_u (1+P) = (1+P) C \quad (5.40)$$

und benutze die Näherung

$$t_u \approx C . \quad (5.41)$$

Dies in (5.35) und (5.36) eingesetzt, ergibt

$$T_{11} = D + P g_0^{-1} + (D g_0 + P) t_u g_0 T_{11} \quad (5.42)$$

und

$$T_{01} = (1+P) \hat{T}_{01} \quad (5.43)$$

mit

$$\hat{T}_{01} = C + (C g_0 + 1) t_u g_0 T_{11} . \quad (5.44)$$

Die Operatoren C und D haben zudem noch den Vorteil, daß sie im Gegensatz zu t_u nicht von der Energie z abhängen. Die Gleichungen (5.42), (5.43) und (5.44) gelten noch ganz allgemein, wenn man von der Näherung (5.41) absieht. Im folgenden Abschnitt werden die speziellen Formen für das Zwei- und Dreinukleonenpotential, wie sie in den vorhergehenden Kapiteln abgeleitet worden sind, eingesetzt.

5.3 Faddeev-Gleichungen für separables Zweinukleonenpotential

In diesem Abschnitt können nun, ausgehend von den Operatorgleichungen (5.42) und (5.44), die Integralgleichungen für die zugehörigen Amplituden hergeleitet werden. Die geeigneten Basiszustände sind für den freien Kanal die in (2.45) und für den

N-d-Kanal die in (2.48) definierten Zustände. Diese Basiszustände sind deshalb geeignet, weil Gesamtbahndrehimpuls L , Gesamtspin S und Gesamtisospin T sowohl mit dem hier gewählten Zwei- als auch Dreinukleonenpotential vertauscht. Folglich müssen L , S und T auch mit T_{11} und T_{01} vertauschen, da die Vertauschbarkeit für jedes Element der Neumann-Reihe zu (5.42) gilt. Also sind die Operatoren T_{11} und T_{01} diagonal in L , M , S , M_S , T und M_T und hängen nicht von M , M_S und M_T ab. Da der Gesamtisospin des N-d-Systems festliegt ($T=\frac{1}{2}$; $M_T=+\frac{1}{2}$ für das p-d- und $M_T=-\frac{1}{2}$ für das n-d-System), wird im Folgenden der Gesamtisospin weggelassen. Wegen des Zweinukleonenpotentials, das nur in s-Wellen wirkt, treten folgende Drehimpulse auf: $\ell=0$ und $\lambda=L$. Die Partialwellenanteile der elastischen Amplitude sind deshalb durch

$$\langle \psi_{\text{Deut}} q' \alpha' | T_{11}(z) | \psi_{\text{Deut}} q \alpha \rangle \quad (5.45)$$

gegeben.

Da der Anfangszustand aus einem freien Nukleon und Deuteron besteht, liegen Spin und Isospin fest: $s=1$ und $t=0$. Es ist also

$$|\alpha\rangle = |\alpha_0\rangle = |0 L M 1 S M_S 0 T M_T\rangle, \quad (5.46)$$

Die Amplituden werden nur halb-on-shell gebraucht; es muß also gelten, wenn $q=q_0$ der Schwerpunktsimpuls des Nukleons sei:

$$z = E_{\text{Deut}} + \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q_0^2 + i\varepsilon. \quad (5.47)$$

Beim separablen Zweinukleonenpotential gilt die Beziehung (3.5) zwischen Deuteronzustand und Triplettefformfaktor; deshalb kann der Kanalzustand so umgeschrieben werden:

$$|\psi_{\text{Deut}} q_0 \alpha_0\rangle = g_0(z) |\chi_0 q_0 \alpha_0\rangle, \quad (5.48)$$

(Auch hier ist z die in (5.47) definierte Schwerpunktsenergie.)
Dies läßt sich auf den virtuellen Singulettzustand erweitern:

$$|\psi_0 q \alpha\rangle = g_0(z) |\chi_0 q \alpha\rangle. \quad (5.49)$$

Die elastischen Amplituden, für die aus (5.42) Integralgleichungen abgeleitet werden müssen, sind also durch

$$E_{s's'}^{LS}(q') = \langle \chi_{s'} q' \alpha' | g_0 T_{s's} g_0 | \chi_s q_0 \alpha \rangle \quad (5.50)$$

definiert. Da wegen der Antisymmetrisierung gelten muß: $(-1)^{s'+t'} = -1$, gibt es die beiden Fälle: $s'=1$ und $t'=0$ oder $s'=0$ und $t'=1$. Für ein bestimmtes L hat man zu $S=3/2$ nur die Amplitude mit $s'=1$, weil nur $s=1$ mit $\sigma = \frac{1}{2}$ zu $S=3/2$ gekoppelt werden kann; bei $S=1/2$ sind $s'=0$ und $s'=1$ möglich. Analog zu (5.50) definiere ich den Born-Term, der auch als Faktor im Integral-kern auftritt, durch

$$Z_{s's}^{LS}(q',q) = Z_{s's}^{(u)LS}(q',q) + Z_{s's}^{(3)LS}(q',q) \quad (5.51)$$

mit

$$Z_{s's}^{(u)LS}(q',q) = \langle \chi_{s'} q' \alpha' | g_0 P | \chi_s q \alpha \rangle \quad (5.52)$$

und

$$Z_{s's}^{(3)LS}(q',q) = \langle \chi_{s'} q' \alpha' | g_0 D g_0 | \chi_s q \alpha \rangle. \quad (5.53)$$

Mit der Darstellung (3.15) für die Zwei-Teilchen-T-Matrix im Drei-Teilchen-Raum erhält man die Integralgleichungen für die elastischen Amplituden:

$$E_{s's'}^{LS}(q') = Z_{s's'}^{LS}(q',q_0) + \sum_{s''} \int_0^\infty Z_{s's''}^{LS}(q',q'') \tau_{s''}(z - \frac{k^2}{m} q''^2) E_{s''}^{LS}(q'') q''^2 dq''. \quad (5.54)$$

Dies sind die üblichen Faddeev-Gleichungen für Drei-Teilchen-Systeme mit separablen Paarwechselwirkungen. Das Neue an (5.54) ist, daß wegen (5.51) der Born-Term neben dem Anteil (5.52), der vom Zweinukleonenpotential herrührt, noch den mit dem Dreinukleonenpotential (5.53) enthält. Auf Grund der speziellen Wahl der Potentiale (Zweinukleonenpotential ohne Tensoranteil, nur mit s-Wellen und Spin-Isospin-gemitteltes Dreinukleonenpotential) ist das Gleichungssystem (5.54) für Gesamtbahndrehimpuls L und Gesamtspin S entkoppelt. Im Quartett-Fall ($S=3/2$) besteht es aus genau einer Gleichung für die Amplitude $E_{\lambda}^{L\frac{1}{2}}(q')$ und im Dublett-Fall ($S=1/2$) gibt es zwei gekoppelte Gleichungen für die Amplituden $E_0^{L\frac{1}{2}}(q')$ und $E_{\lambda}^{L\frac{1}{2}}(q')$.

Die Aufbruchamplitude zu $\hat{T}_{01}$ ist durch

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda's'}^{LS}(p',q') &= \langle \lambda' p' q' \alpha' | \hat{T}_{01} g_0 | \chi_{\lambda} q_0 \alpha_0 \rangle \\ &= T_{\lambda'\lambda's'}^{(2)LS}(p',q') + T_{\lambda'\lambda's'}^{(3)LS}(p',q') \end{aligned} \quad (5.55)$$

mit

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda's'}^{(2)LS}(p',q') &= \langle \lambda' p' q' \alpha' | t_{\lambda} g_0 T_{\lambda\lambda} g_0 | \chi_{\lambda} q_0 \alpha_0 \rangle \\ &= \delta_{q_0} \delta_{\lambda\lambda'} \chi_{s'}(p') \tau_{s'} \left(\frac{p'^2}{m} p'^2 + i\epsilon \right) E_{s'}^{LS}(q') \end{aligned} \quad (5.56)$$

und

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda's'}^{(3)LS}(p',q') &= \langle \lambda' p' q' \alpha' | (C + C g_0 t_{\lambda} g_0 T_{\lambda\lambda}) g_0 | \chi_{\lambda} q_0 \alpha_0 \rangle \\ &= \sum_{\lambda''\lambda's'',1}^{(03)LS}(p',q',q_0) \\ &+ \sum_{s''} \int_0^{\infty} \sum_{\lambda''\lambda's'',s''}^{(03)LS}(p',q',q'') \tau_{s''}(z - \frac{p'^2}{m} q''^2) E_{s''}^{LS}(q'') q''^2 dq'' \end{aligned} \quad (5.57)$$

gegeben. Da die Aufbruchamplitude nur on-shell benötigt wird, hat zu gelten:

$$Z = \frac{k^2}{m} \gamma^2 + i\varepsilon = \frac{k^2}{m} \left(p'^2 + \frac{3}{4} q'^2 \right) + i\varepsilon = E_{\text{Deut}} + \frac{k^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q_0^2 + i\varepsilon ; \quad (5.58)$$

das heißt, p' ist eindeutig durch q' festgelegt. Die Quantenzahlen des Endkanales sind durch

$$|\alpha'\rangle = |l'\lambda' LM s' SM_s t' TM_T\rangle \quad (5.59)$$

mit $(-1)^{s'+t'} = -1$ gegeben.

Der zusätzliche Anteil zur Aufbruchamplitude, der vom Dreinukleonenpotential herrührt, ergibt sich, wie (5.57) zeigt, aus den halb-off-shell-Amplituden $E_{s''}^{LS}(q')$; die Gleichung (5.57) hat dieselbe Struktur wie die Integralgleichung für $E_s^{LS}(q')$ (5.54), nur daß statt des Born-Termes $Z_{s's}^{LS}(q',q)$ hier die Funktion

$$Z_{l'\lambda's's}^{(03)LS}(p',q',q) = \langle p'q'\alpha' | C_{q_0} | \chi_s q \alpha \rangle \quad (5.60)$$

steht. Die explizite Form der Funktionen $Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$, $Z_{s's}^{(3)LS}(q',q)$ und $Z_{l'\lambda's's}^{(03)LS}(p',q',q)$ wird in den nächsten Abschnitten angegeben.

Durch Aufsummation der Drehimpulse erhält man aus den oben definierten Amplituden zusammen mit den entsprechenden Kugelfunktionen die vollen Amplituden, die von den Impulsvektoren abhängen:

$$\begin{aligned} E_s^S(\vec{q}', \vec{q}_0) &= \langle \chi_{s'} \vec{q}' s' | q_0 T_{11} g_0 | \chi_s \vec{q}_0 s_0 \rangle \\ &= \sum_{LM} E_{s's}^{LS}(q') Y_{LM}(\vec{q}') Y_{LM}^*(\vec{q}_0) \end{aligned} \quad (5.61)$$

und

$$\begin{aligned} T_{s't'}^S(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) &= \langle \vec{p}' \vec{q}' s' | \hat{T}_{01} g_0 | \chi_\lambda \vec{q}_0 s_0 \rangle \\ &= T_{s't'}^{(2)S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) + T_{s't'}^{(3)S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) \end{aligned} \quad (5.62)$$

mit

$$\begin{aligned} T_{s't'}^{(2)S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) &= \langle \vec{p}' \vec{q}' s' | t_1 g_0 T_{\lambda 1} g_0 | \chi_\lambda \vec{q}_0 s_0 \rangle \\ &= \chi_s(p') T_{s'}(\frac{1}{2} p'^2 + i\epsilon) E_{s'}^S(\vec{q}', \vec{q}_0) \end{aligned} \quad (5.63)$$

und

$$\begin{aligned} T_{s't'}^{(3)S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) &= \langle \vec{p}' \vec{q}' s' | C g_0 t_1 g_0 T_{\lambda 1} g_0 | \chi_\lambda \vec{q}_0 s_0 \rangle \\ &= \sum_{\ell' \lambda' L M} T_{\ell' \lambda' s'}^{(3)LS}(p', q') Y_{\ell' \lambda' L M}(\hat{p}', \hat{q}') Y_{L M}^*(\hat{q}_0). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Hier sind der Eingangsimpuls $\vec{q}_0$ zur Charakterisierung der Richtung des Strahls und der Isospin t' , für den $(-1)^{s'+t'} = -1$ gilt, wieder eingeführt worden. Spin- und Isospinanteil des Anfangszustandes ist durch $|s_0\rangle = |1 \text{ SM}_s \text{ 0 TM}_t\rangle$ gegeben. Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_{s's}^{(2)S}(\vec{q}', \vec{q}) &= \langle \chi_{s'} \vec{q}' s' | g_0 P | \chi_s \vec{q} s \rangle \\ &= \sum_{L M} Z_{s's}^{(2)LS}(q', q) Y_{L M}(\hat{q}') Y_{L M}^*(\hat{q}). \end{aligned} \quad (5.65)$$

In diesem Abschnitt ist also die Integralgleichung für die elastische Streuamplitude aufgestellt worden und gezeigt worden, wie sich daraus die Aufbruchamplitude ergibt. Die einzelnen Terme dieser Integralgleichung werden dann in den nächsten Abschnitten diskutiert.

5.4 Born-Term zum Zweinukleonenpotential

Der durch (5.52) definierte Born-Term, auch effektives Potential genannt, bringt durch seine Singularitäten einige Schwierigkei-

ten bei der numerischen Lösung der Integralgleichung mit sich, die nun untersucht werden sollen. Aus der Definition (5.52) für $Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$ ergibt sich, wenn man die Gleichung (2.54) für die Umrechnung zwischen verschiedenen Jacobi-Koordinaten benutzt, der Ausdruck

$$Z_{s's}^{(2)LS}(q',q) = \frac{1}{2} \left[(-1)^{s'+t'} + (-1)^{s+t} \right] \Lambda_{s's}^S \Lambda_{t't}^T \int_{-1}^1 \frac{\chi_s(\sqrt{\frac{1}{4}q'^2 + q^2 + q'qx}) \chi_s(\sqrt{q'^2 + \frac{1}{4}q^2 + q'qx})}{\frac{\hbar^2}{m}(\gamma^2 + i\varepsilon - q'^2 - q^2 - q'qx)} P_L(x) dx. \quad (5.66)$$

Für die Schwerpunktsenergie wurde $z = \frac{\hbar^2}{m}(\gamma^2 + i\varepsilon)$ geschrieben. Der Vorfaktor mit den Phasen sorgt für die Erhaltung der Antisymmetrisierung im Subsystem. Die zu (5.65) gehörende analytische Form ist

$$Z_{s's}^{(2)LS}(\vec{q}', \vec{q}) = \left[(-1)^{s'+t'} + (-1)^{s+t} \right] \Lambda_{s's}^S \Lambda_{t't}^T \frac{\chi_s(|\vec{q}' + \frac{1}{2}\vec{q}|) \chi_s(|\vec{q}' - \frac{1}{2}\vec{q}|)}{\frac{\hbar^2}{m}(\gamma^2 + i\varepsilon - q'^2 - q^2 - \vec{q}' \cdot \vec{q})}, \quad (5.67)$$

und es gilt

$$Z_{s's}^{(2)LS}(q',q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Z_{s's}^{(2)S}(\vec{q}', \vec{q}) P_L(\hat{q}' \cdot \hat{q}) d(\hat{q}' \cdot \hat{q}). \quad (5.68)$$

Da der Nenner im Integranden von (5.66) verschwinden kann, können Pole auftreten, die aber im allgemeinen wegen des kleinen Imaginärteiles $i\varepsilon$ integrierbar sind. Die Pole sind durch

$$\gamma^2 - q'^2 - q^2 - q'qx_p = 0, \quad (5.69)$$

das heißt durch

$$x_p = \frac{\gamma^2 - q'^2 - q^2}{q'q} \quad (5.70)$$

festgelegt. Falls $|x_p| > 1$ ist, liegen die Pole außerhalb des Integrationsbereiches; dies gilt immer, falls $\gamma^2 < 0$ ist, falls also die gesamte Schwerpunktsenergie unterhalb der Aufbruchschwelle liegt. Bei positiven Energien, die hier interessieren, gilt $|x_p| > 1$ für die Impulspaare (q', q) , die außerhalb des schraffierten Bereiches in Abbildung 5.1 liegen.

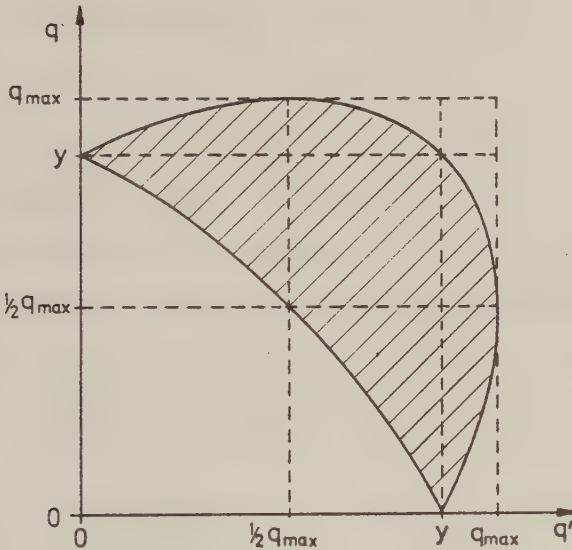


Abbildung 5.1: Lage der logarithmischen Singularitäten (Amado-Ellipsen)

Der Fall $|x_p| < 1$ kann also nur für $\gamma^2 > 1$ auftreten: für $q'-q$ -Werte, die im schraffierten Gebiet von Abb. 5.1 liegen. Auf den Begrenzungskurven dieses Gebietes, den Amado-Ellipsen [Aar 64], gilt: $|x_p| = 1$. Da hier der Pol mit einer der beiden Integrationsgrenzen zusammenfällt, divergiert das Integral in (5.66). Für $|x_p| < 1$ kann wegen des positiven Imaginär-

teiles $i\epsilon$ über den Pol integriert werden. Durch Herausziehen des Poltermes aus dem Integral ergibt sich das singuläre Verhalten:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{s's}(q',q) = & \chi_{s'}(p'_0) \chi_s(p_0) P_L(x_p) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\gamma^2 - q'^2 - q^2 - q'q x + i\epsilon} \\ & + \int_{-1}^1 \left[\chi_{s'}(\sqrt{\frac{1}{4}q'^2 + q^2 + q'qx}) \chi_s(\sqrt{q'^2 + \frac{3}{4}q^2 + q'qx}) P_L(x) \right. \\ & \left. - \chi_{s'}(p'_0) \chi_s(p_0) P_L(x_p) \right] \frac{dx}{\gamma^2 - q'^2 - q^2 - q'qx} . \end{aligned} \quad (5.71)$$

Hierbei sei $\hat{Z}_{s's}(q',q) = \frac{1}{m} \left[(i^{-1})^{s'+t'} + (-1)^{s+t} \right] \Lambda_{s's}^S \Lambda_{t't}^T \Big]^{-1} Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$; die Impulse p'_0 und p_0 seien die zu q' und q gehörenden on-shell-Relativimpulse, die durch $\gamma^2 = p_0'^2 + \frac{3}{4}q'^2 = p_0^2 + \frac{3}{4}q^2$ gegeben sind. Das zweite Integral in (5.71) ist regulär, da für $x=x_p$ sowohl Zähler als auch Nenner verschwinden; für das erste Integral ergibt sich ($q' \cdot q \neq 0$):

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\gamma^2 - q'^2 - q^2 - q'qx + i\epsilon} = \frac{1}{q'q} \ln \left| \frac{\gamma^2 - q'^2 - q^2 + q'q}{\gamma^2 - q'^2 - q^2 - q'q} \right| - \frac{i\pi}{q'q} . \quad (5.72)$$

$Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$ hat somit nur in dem schraffierten Gebiet von Abbildung 5.1 einen Imaginärteil:

$$\text{Im } \tilde{Z}_{s's}(q',q) = \begin{cases} 0 , & |x_p| > 0 \\ \frac{\pi}{2q'q} \chi_{s'}(p'_0) \chi_s(p_0) P_L(x_p) , & |x_p| < 1 \end{cases} \quad (5.73)$$

Noch zu behandeln ist der Fall: $qq'=0$. Es gilt:

$$\tilde{Z}_{s's}^{(1)}(0, q) = \frac{\chi_s(q) \chi_s(\frac{1}{2}q)}{y^2 - q^2 + i\epsilon} \delta_{L0} \quad (5.74)$$

und

$$\tilde{Z}_{s's}^{(1)}(q', 0) = \frac{\chi_s(\frac{1}{2}q') \chi_s(q')}{y^2 - q'^2 + i\epsilon} \delta_{L0} \quad (5.75)$$

Die Situation ist also die Folgende. Für $|x_p| > 1$ ist $Z_{s's}^{(2)LS}(q', q)$ rein reell und singularitätenfrei. Für $|x_p| < 1$ hat $Z_{s's}^{(2)LS}(q', q)$ einen Imaginärteil, der sich aus (5.73) ergibt. Logarithmische Singularitäten treten auf den Amado-Ellipsen auf, die durch $|x_p| = 1$ gegeben sind. In den Schnittpunkten der Ellipsen, die bei $(q', q) = (0, \gamma)$ und $(q', q) = (\gamma, 0)$ liegen, entarten die zusammenfallenden logarithmischen Singularitäten, wie aus (5.74) und (5.75) deutlich wird, zu einem Pol. Spezielle singuläre Punkte (q', q) sind die Folgenden: $(0, \gamma)$, $(\frac{1}{2}q_{\max}, q_{\max})$, (γ, γ) , $(q_{\max}, \frac{1}{2}q_{\max})$, $(\gamma, 0)$ und $(\frac{1}{2}q_{\max}, \frac{1}{2}q_{\max})$; dies sind in Abbildung 5.1 die Schnittpunkte der Ellipsen mit den gestrichelten Geraden. Dabei ist

$$q_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \quad (5.76)$$

der größte physikalische Impuls, der der on-shell-Bedingung

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \gamma^2 = \frac{\hbar^2}{m} (p^2 + \frac{3}{4} q^2) \quad \text{genügt.}$$

Nun kann untersucht werden, welche Auswirkungen diese Ergebnisse

für die Integralgleichung (5.54) haben. Der Zweinukleonen-Born-

Term $Z_{s's}^{(2)LS}(q', q)$ tritt in der Inhomogenität auf und ist dort

wegen $q = q_0 > q_{\max}$ reell und singularitätenfrei. Im Integralkern

kommt $Z_{s's}^{(2)LS}(q', q'')$ off-shell vor, führt also, sofern $\gamma^2 > 0$ ist,

für $q' \in [0, q_{\max}]$ zu den von q' abhängigen logarith-

mischen Singularitäten, die bei $q'' = |\frac{1}{2} q' \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q'^2}|$ liegen.

Da die Integrale über den Logarithmus in (5.72) endlich sind,

sind also auch die Amplituden endlich. Auch die gemäß (5.74) und (5.75) auftretenden Pole führen nicht zu divergierenden Integralen. Für $q' = \gamma$ ist der Pol bei $q'' = 0$ (vergl. (5.75)) harmlos, da auch q''^2 , das im Integralkern auftritt, verschwindet. Für $q' = 0$ muß der Pol bei $q' = \gamma$ (siehe (5.74)) aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\int_0^{q_{\max}} \frac{F_1(q'') dq''}{\gamma^2 - q''^2 + i\epsilon} = -F_1(\gamma) \frac{i\pi}{2\gamma} + \int_0^{q_{\max}} \frac{F_1(q'') dq''}{\gamma^2 - q''^2} \quad (5.77)$$

Dabei ist $F_1(q')$ der reguläre Rest des Integranden, und mit $\int$ ist das Hauptwertintegral gemeint, das einen endlichen Wert hat:

Eine Singularität tritt jedoch in den Amplituden auf. Ein Beitrag zum Integral in (5.54) ist

$$I = \int_0^{\infty} \text{Im } Z_{ss}^{LS}(q', q'') F_2(q'') dq'' \quad (5.78)$$

wo $F_2(q')$ bis auf Faktoren das Produkt $\tau_{ss}(z - \frac{z^2}{2} + q''^2) E_{ss}^{LS}(q'') q''^2$ darstellt. Für $\gamma < q' < q_{\max}$ reduziert sich das Integral (5.78) wegen (5.73) auf

$$I = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}q' - p_0'}^{\frac{1}{2}q' + p_0'} \chi_s(p_0') \chi_s(p_0'') P_L\left(\frac{\gamma^2 - q'^2 - q''^2}{q'q''}\right) F_2(q'') \frac{dq''}{q'q''} \quad (5.79)$$

Wenn $q' \approx q_{\max}$ ist, kann (5.79) durch

$$I \approx 2p_0' \cdot \frac{\pi}{2} \chi_s(0) \chi_s\left(\frac{3}{4}q_{\max}\right) P_L(-1) F_2\left(\frac{1}{2}q_{\max}\right) \quad (5.80)$$

angenähert werden, da der Integrand in (5.79) in der Umgebung

von $q' = \frac{1}{2} q_{\max}$ nur schwach veränderlich ist. Demnach verhält sich die Amplitude $E_{s'}^{LS}(q')$ für $q' \rightarrow q_{\max}$ wie die Wurzel $p'_0 = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{2} q'^2}$, und bei $q' = q_{\max}$ divergiert die Ableitung von $E_{s'}^{LS}(q')$. Dies ist speziell bei der numerischen Lösung der Integralgleichung zu beachten, weil die Amplitude interpoliert werden muß.

5.5 Dreinukleonenpotential in den Faddeev-Gleichungen

Bevor die Funktionen $Z_{s's}^{(1)LS}$ und $Z_{\rho'\lambda's',s}^{(03)LS}$, die auf Grund des Dreinukleonenpotentials in den Gleichungen für die elastische und Aufbruchamplitude, (5.54) und (5.55), auftreten, untersucht werden können, muß ein Schritt zurückgegangen werden. Es müssen die Matrixelemente für die Operatoren C und D, die in den Gleichungen (5.39) und (5.40) definiert worden sind, angegeben werden. Im Folgenden sei $|g\rangle = |st\rangle = |sSM_s tTM_T\rangle$, $|g'\rangle = |s't'\rangle = |s'SM_{s'} t'TM_{T'}\rangle$. Mit den Formeln (A.22) und (4.18) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' \vec{q}' g' | C | \vec{p} \vec{q} g \rangle &= \\ &= \sum_{s''} \int \langle \vec{p}' \vec{q}' g' | u | \vec{p}'' \vec{q}'' g'' \rangle \langle \vec{p}'' \vec{q}'' g'' | 1 + P | \vec{p} \vec{q} g \rangle d^3(p'' q'') \\ &= a_{s't'}^S \sum_{s''t''} a_{s''t''}^S \int \bar{W}_\lambda(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}'', \vec{q}'') \cdot \left[\delta(\vec{p}' - \vec{p}'') \delta(\vec{q}' - \vec{q}'') \delta_{s's''} \delta_{t't''} \right. \\ &\quad \left. + \Lambda_{s's}^S \Lambda_{t't}^T \left((-1)^{s''+t''} \langle \vec{p}'' \vec{q}'' | \vec{p} \vec{q} \rangle + (-1)^{s+t} \langle \vec{p}'' \vec{q}'' | \vec{p} \vec{q} \rangle \right) \right] d^3(p'' q''). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Die Summe über s'' und t'' kann ausgeführt werden, wenn der folgende Zusammenhang benutzt wird:

$$\sum_{s''t''} a_{s''t''}^S \langle \vec{p}'' \vec{q}'' s'' | 1 + P | \vec{p} \vec{q} s \rangle_\lambda = \langle \vec{p}'' \vec{q}'' | P_r | \vec{p} \vec{q} \rangle a_{st}^S \quad (5.8)$$

Demnach brauchen die Permutationen nur im Ortsanteil ausgeführt zu werden, und die Spin-Isospin-Abhängigkeit ist nur noch durch die Koeffizienten a_{st}^S gegeben. Es folgt also:

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' s' | C | \vec{p} \vec{q} s \rangle = a_{s't'}^S \langle \vec{p}' \vec{q}' | \bar{W}_1 (1 + P_r) | \vec{p} \vec{q} \rangle a_{st}^S, \quad (5.83)$$

und analog ergibt sich

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' s' | D | \vec{p} \vec{q} s \rangle = a_{s't'}^S \langle \vec{p}' \vec{q}' | (1 + P_r) \bar{W}_1 (1 + P) | \vec{p} \vec{q} \rangle a_{st}^S. \quad (5.84)$$

Entsprechendes gilt für die Matrixelemente zu den Zuständen $|pq\alpha\rangle$ und $|p'q'\alpha'\rangle$:

$$\langle p'q'\alpha' | C | pq\alpha \rangle = a_{s't}^S a_{st}^S C_{2'\lambda'2\lambda L}(p', q', p, q) \quad (5.85)$$

und

$$\langle p'q'\alpha' | D | pq\alpha \rangle = a_{s't}^S a_{st}^S D_{2'\lambda'2\lambda L}(p', q', p, q) \quad (5.86)$$

mit

$$C_{2'\lambda'2\lambda L}(p', q', p, q) = \langle p'q'2'\lambda'LM | \bar{W}_1 (1 + P_r) | pq2\lambda LM \rangle \quad (5.87)$$

$$= U_{2'\lambda'2\lambda L}(p', q', p, q)$$

$$+ \sum_{\lambda''\lambda'''} \frac{1}{2} [(-1)^{\lambda''} + (-1)^{\lambda'''}] \int_{-1}^1 U_{2'\lambda'2''\lambda''L}(p', q', p, q) \frac{P_{2\lambda2''\lambda''L}(pqx) dx}{p_b^{\lambda''} q_b^{\lambda'''}}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2'1'2\lambda L}(p', q', p, q) &= \mathcal{C}_{2'1'2\lambda L}(p', q', p, q') \\ &+ \sum_{l''\lambda''} \frac{1}{2} [(-1)^{l'} + (-1)^{l''}] \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{P}_{2'1'2''\lambda'' L}(p', q', x')}{p_b^{l''} q_b^{\lambda''}} \mathcal{C}_{2''\lambda''2\lambda L}(p_b', q_b', p, q) dx' \end{aligned} \quad (5.88)$$

Die Impulse p_b', q_b', p_b und q_b sind wie in (A.4) und (A.5) definiert. Da, wie in Anhang A gezeigt wird, $\mathcal{P}_{2'1'2\lambda L}(p, q, x)$ die Gesamtparität erhält $(-1)^{2+\lambda} = (-1)^{2'+\lambda'}$, ergibt sich wegen des Faktors $[(-1)^{l''} + (-1)^{l'}]$ in (5.87), der die Paritätserhaltung im Subsystem gewährleistet, daß für $\mathcal{C}_{2'1'2\lambda L}$ (und analog auch für $\mathcal{D}_{2'1'2\lambda L}$) die Paritäten von Subsystem und drittem Teilchen erhalten sind: $(-1)^{2'} = (-1)^2$, $(-1)^{\lambda'} = (-1)^\lambda$. Dieselbe Eigenschaft ist auch schon für $\mathcal{V}_{2'1'2\lambda L}$ gefunden worden.

Die Gleichung (5.87) kann nicht benutzt werden, falls $p = q = 0$ ist, weil dann auch $p_b = q_b = 0$ gilt. Mit der Darstellung (4.80) kann das Integral in (5.87) so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p'^{l'} q'^{\lambda'} \tilde{\mathcal{V}}_{2'1'2''\lambda'' L}(p', q', 0, 0) \mathcal{P}_{2\lambda} e^{i\lambda x} (0, 0, x) dx \\ = \delta_{2''0} \delta_{\lambda''0} \delta_{L0} p'^{l'} q'^{\lambda'} \int_{-1}^1 \tilde{\mathcal{V}}_{2'1'000}(p', q', 0, 0) \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}(x) A_{2\lambda 000}^{0000\Lambda} \\ = \delta_{2'1'} \delta_{2''0} \delta_{\lambda''0} \delta_{L0} \delta_{\lambda 0} \delta_{L0} \cdot 2 \mathcal{V}_{2'1'000}(p', q', 0, 0). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Es folgt also

$$\mathcal{C}_{2'1'2\lambda L}(p', q', 0, 0) = 3 \delta_{2'1'} \delta_{L0} \delta_{\lambda 0} \delta_{L0} \mathcal{V}_{2'1'000}(p', q', p, q), \quad (5.90)$$

und analog gilt:

$$D_{\ell' \lambda' \ell \lambda L} (00, p, q) = 3 \delta_{\ell' 0} \delta_{\lambda' 0} \delta_{\ell 0} \delta_{\lambda 0} C_{00 \ell \lambda 0} (00, p, q), \quad (5.9)$$

Mit den nun vollständig definierten Funktionen $C_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}$ und $D_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}$ lassen sich nun die Terme der Faddeev-Gleichungen, in denen das Dreinukleonenpotential steckt, formulieren. Für $Z_{\ell' \lambda' s', s}^{(03) LS} (p', q', q)$, das in (5.60) definiert ist, folgt somit

$$Z_{\ell' \lambda' s', s}^{(03) LS} (p', q', q) = a_{s't'}^S a_{st}^S \cdot \frac{m}{\pi^2} \int_0^\infty C_{\ell' \lambda' 0 \ell L} (p', q', p, q) \frac{\chi_s(p) p^2}{\gamma^2 - p^2 - \frac{3}{4} q^2 + i\epsilon} dp. \quad (5.92)$$

Da die Abhängigkeit vom Endzustandsspin s' allein in dem Faktor $a_{s't'}^S$ steckt, ist es sinnvoll, durch

$$Z_{\ell' \lambda' s', s}^{(03) LS} (p', q', q) = a_{s't'}^S \tilde{Z}_{\ell' \lambda' s}^{(03)} (p', q', q), \quad (5.93)$$

$$T_{\ell' \lambda' s'}^{(1) LS} (p', q') = a_{s't'}^S \tilde{T}_{\ell' \lambda'}^{(1) LS} (p', q') \quad (5.94)$$

und

$$T_{s't'}^{(1) S} (\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) = a_{s't'}^S \tilde{T}^{(1) S} (\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0) \quad (5.95)$$

die mit der Tilde gekennzeichneten Größen zu definieren, die nicht von Subsystemspin s' und -isospin t' des Endkanals abhängen. Da bei Aufbruchreaktionen die Schwerpunktsenergie positiv ist, das heißt, es ist $\gamma^2 > 0$, kann der Nenner des Integranden in (5.96) verschwinden; es gibt daher für $q < q_{\max}$ Pole, die bei $p = p_0 = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q^2}$ liegen (p_0 ist der zu q gehörende on-shell-Impuls). Wie bei $Z_{s's}^{(2) LS}$ (siehe (5.77))

kann auch hier der Pol aus dem Integral herausgezogen werden. Da $0 < p_0 < \gamma$ gilt, braucht nur das folgende Teilintegral betrachtet zu werden:

$$\int_0^{\gamma} \frac{F_3(p) p^2 dp}{p_0^2 - p^2 + i\epsilon} = -\frac{i\pi}{2} p_0 F_3(p_0) + \int_0^{\gamma} \frac{F_3(p) p^2}{p_0^2 - p^2} dp \quad (5.97)$$

Hier ist $F_3(p) p^2$ der reguläre Rest des Integranden von (5.92).

Für $Z_{s's}^{(3)LS}(q', q)$ folgt aus (5.53):

$$Z_{s's}^{(3)LS}(q', q) = \alpha_{st}^s \alpha_{st}^s \left(\frac{m}{k^2}\right)^2 \iint_0^{\infty} \frac{\chi_s(p') p'^2}{p_0'^2 - p'^2 + i\epsilon} D_{000L}(p', q', p, q) \frac{\chi_s(p) p^2}{p_0^2 - p^2 + i\epsilon} dp' dp \quad (5.98)$$

Hier gibt es wie bei $\tilde{Z}_{p'X's}^{(3)LS}(p', q', q)$ für $q \leq q_{\max}$ den Pol bei $p = p_0 = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q^2}$; hinzu kommt noch für $q' \leq q_{\max}$ der Pol bei $p' = p_0' = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q'^2}$. Die Pole können wie in (5.97) integriert werden.

Daraus ergibt sich der folgende Unterschied zwischen $Z_{s's}^{(2)LS}$ und $Z_{s's}^{(3)LS}$. Auch wenn die Impulse halb-on-shell sind ($q = q_0$), gibt es für $q' < q_{\max}$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil von $Z_{s's}^{(3)LS}(q', q)$. Für $q' \rightarrow q_{\max}$ fällt der Imaginärteil von $Z_{s's}^{(3)LS}(q', q)$, wie sich aus (5.97) ergibt, wie die Wurzel $p_0' = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q'^2}$ ab; Analoges gilt für den Imaginärteil von $Z_{s's}^{(3)LS}(q', q)$ und $\tilde{Z}_{p'X's}^{(3)LS}(p', q', q)$, wenn $q \rightarrow q_{\max}$ geht. Daher divergieren die entsprechenden Ableitungen bei $q' = q_{\max}$ bzw.

$q = q_{\max}$. Die Wurzelsingularität tritt also auch bei dem halb-on-shell-Wert $Z_{s's}^{(3)LS}(q', q_0)$ bei $q' = q_{\max}$ auf; die Faddeev-Gleichungen (5.54) haben folglich eine singuläre Inhomogenität, die aber keine numerischen Schwierigkeiten bereitet.

Logarithmische Singularitäten, die bei $Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$ genau dann auftreten, wenn der Pol an einer der Integrationsgrenzen liegt, sind bei $Z_{s's}^{(3)LS}(q',q)$ nicht möglich, da einerseits $p_0 < \infty$ ist und für $q = q_{\max}$ zwar $p_0 = 0$ ist, der daraus folgende Pol bei $p = 0$ durch den Faktor p^2 im Zähler des Integranden von (5.98) aufgehoben wird. Für $\tilde{Z}_{s'N',s}^{(103)LS}(p',q',q)$ gilt das Gleiche.

5.6 Zwei-Teilchen-T-Matrix in den Faddeev-Gleichungen

Als letzter Anteil des Integralkernes der Faddeev-Gleichungen (5.54) muß noch die Zwei-Teilchen-T-Matrix untersucht werden, die in Form der Funktion $\tau_s(z - \frac{k^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q'^2)$ auftritt. Wegen $Z = E_{\text{Deut}} + \frac{k^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q_0^2 + i\epsilon$ folgt aus (3.11), daß der Nenner von $\tau_s(z - \frac{k^2}{m} \cdot \frac{3}{4} q_0^2)$ den Faktor $(q_0^2 - q'^2 + i\epsilon)$ enthält; der Triplett-pol tritt also im Integranden von (5.54) bei $q'' = q_0$ auf. Wie in den vorhergehenden Abschnitten schon beschrieben wurde, ist dieser Pol wegen des positiven Imaginärteiles $i\epsilon$ im Nenner integrierbar. Mit $q_t = \sqrt{4\kappa^2 + q_0^2}$ gilt $q_{\max} < q_0 < q_t$ (für die rein elastische Streuung unterhalb der Aufbruchschwelle, also für $\gamma^2 < 0$, sei $q_{\max} = 0$ gesetzt.); hier braucht also nur der Anteil $\int_{q_{\max}}^{q_t}$ des Integrales in (5.54) betrachtet zu werden. Wie in (5.97) wird nun der Pol aus dem Integral herausgezogen, und es ergibt sich:

$$\int_{q_{\max}}^{q_t} \frac{F_4(q'') dq''}{q_0^2 - q'^2 + i\epsilon} = -\frac{i\pi}{2q_0} F_4(q_0) + \int_{q_{\max}}^{q_t} \frac{F_4(q'')}{q_0^2 - q'^2} dq'' , \quad (5.99)$$

wo $F_4(q)$ der reguläre Rest des Integrales in (5.54) und $\int_{q_{\max}}^{q_t}$ das Hauptwertintegral ist.

Da der Antiboundstate zu $s=0$ im zweiten Blatt liegt, führt der Integrationsweg von (5.54) nicht über den zugehörigen Pol der T-Matrix. Das Argument von τ_s läßt sich so darstellen:

$$z = \frac{\hbar^2}{m} \left(\gamma^2 - \frac{3}{4} q^2 \right) + i\varepsilon = \frac{\hbar^2}{m} p'^2 + i\varepsilon$$
, wo p'' der zu q'' gehörende on-shell-Impuls ist, falls $\gamma^2 > 0$ ist. Für $q''=0$ ist $p'= \gamma$, bei $q''=q_{\max}$ wird $p''=0$, für $q'' > q_{\max}$ ist der zugehörige Subsystemimpuls rein imaginär: $p'' = i \sqrt{\frac{3}{4} q''^2 - \gamma^2}$. Da in der komplexen p'' -Ebene der Singulett-pol bei $i\kappa_0$, also wegen $\kappa_0 < 0$ auf negativen imaginären Achse liegt, ist er, weil κ_0 relativ klein ist, doch sehr dicht am Integrationsweg. Dies ist der Grund, weshalb das Singulett-UPA-Potential nicht bei der Energie $E=0$, sondern beim Antiboundstate angepaßt wurde, weil so der Abfall des Poles korrekter ist, was sich sicherlich bis zur positiven reellen und imaginären Achse der p'' -Ebene auswirkt.

Für $q'' < q_{\max}$, wo p'' reell ist, wird in (3.10) über den Pol integriert und τ_s ist somit komplex. Durch Herausziehen des Poles in (2.10) läßt sich der Imaginärteil von τ_s angeben; es zeigt sich, daß für $q'' < q_{\max}$ und $q'' \rightarrow q_{\max}$ $\text{Im} \tau_s \left(z - \frac{\hbar^2}{m} \frac{3}{4} q''^2 \right)$ wie $p'' = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q''^2}$ gegen Null geht. Damit enthält $\tau_s \left(z - \frac{\hbar^2}{m} \frac{3}{4} q''^2 \right)$ dieselbe Wurzelsingularität bei $q''=q_{\max}$ wie $E_{s'}^{LS}$, $Z_{s's}^{(3)LS}$ und $Z_{2N's}^{(3)LS}$. Für $q'' > q_{\max}$ ist wegen $p''^2 = \gamma^2 - \frac{3}{4} q''^2 < 0$ die Subsystemenergie negativ und in (3.10) tritt kein Pol im Integranten auf: $\tau_s \left(z - \frac{\hbar^2}{m} \frac{3}{4} q''^2 \right)$ ist also für $q'' > q_{\max}$ rein reell.

5.7 Homogene Faddeev-Gleichungen

Bis jetzt wurden die Faddeev-Gleichungen (5.54) nur unter dem Aspekt betrachtet, daraus die elastischen Amplituden zu gewinnen. Die N-d-Streuung ist für die Gesamtenergie z im Schwerpunktsystem rein elastisch, falls $E_{\text{Deut}} < z < 0$ ist, und für $z > 0$ ist neben dem elastischen Kanal auch der Aufbruchkanal offen. Wie beim Zwei-Teilchen-Problem, wo die homogene Lippmann-Schwinger-Gleichung als Eigenwertgleichung für den Bindungszustand benutzt werden kann, läßt sich aus den gekoppelten Dublettgleichungen zum Gesamtdrehimpuls $L=0$,

$$E_{s's}^{0\frac{1}{2}}(q', q, z) = \sum_{s''} \int_0^{\infty} Z_{s's''}^{0\frac{1}{2}}(q', q'', z) \tau_s(z - \frac{1}{m} \frac{3}{4} q''^2) E_{s''s}^{0\frac{1}{2}}(q'', q, z) q''^2 dq'' \quad (5.100)$$

die Tritonenergie $z = E_{\text{Trit}}$ als Eigenwert bestimmen. Diese Gleichung ist wegen $z < E_{\text{Deut}}$ off-shell. Der Impulse q und der Spin s können frei gewählt werden. Wegen $E_{\text{Trit}} < 0$ existieren in den Integralen (5.66) und (5.98), die zur Berechnung von $Z_{s's}^{0\frac{1}{2}}$ ausgeführt werden müssen, keine Pole; $Z_{s's}^{0\frac{1}{2}}$ enthält somit weder die logarithmischen noch die Wurzelsingularitäten und ist reell. Da $E_{\text{Trit}} < E_{\text{Deut}}$ ist, ist das Argument von τ_s immer negativ, und τ_s ist ebenfalls singularitätenfrei und reell. Die numerische Behandlung des Integrales in (5.100) ist daher sehr einfach.

Die mit den hier benutzten separablen Potentialen aus (5.100) berechnete Tritonenergie stellt keinen realistischen Wert dar. Hier geht es nur um die qualitative Abschätzung des Einflusses des Dreinukleonenpotentials auf den gebundenen Zustand.

6. Aufbruchwirkungsquerschnitt und Kinematik

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, wie aus den Faddeev-Gleichungen die elastischen und Aufbruchamplituden folgen. Mit Hilfe dieser Amplituden kann nun der Aufbruchwirkungsquerschnitt, der den Vergleich zwischen Theorie und Experiment möglich macht, angegeben werden. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird der dynamische Anteil des Wirkungsquerschnitts, also die Abhängigkeit von den Amplituden, abgeleitet. Im zweiten Abschnitt wird der Phasenraumfaktor angegeben, der die Kinematik der Reaktion beschreibt. Spezielle kinematische Konfigurationen, zu denen die Wirkungsquerschnitte berechnet werden sollen, werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels aufgeführt; dazu gehören die "final-state-interaction", die Quasi-freie-Streuung, die kollineare und die Sternkonfiguration.

6.1 Herleitung des Aufbruchwirkungsquerschnittes

Da der Aufbruchquerschnitt, der proportional zur Übergangswahrscheinlichkeit ist, für das Laborsystem angegeben werden soll, müssen Anfangs- und Endzustand der Reaktion in Laborkoordinaten angegeben werden.

Für den Anfangskanal, der aus einem freien Nukleon und Deuteron besteht, sind $\vec{k}$ als Impuls für das Nukleon und $\vec{K}$ als Impuls für das Deuteron (siehe Gleichung (2.12)) die geeigneten Koordinaten. Hier soll nur der Fall betrachtet werden, bei dem der Nukleonenstrahl auf das ruhende Deuteronentarget geschossen wird; daher gilt $\vec{K} = 0$ und für den erhaltenen Gesamtimpuls folgt: $\vec{P} = \vec{k}$. Für Spin und Isospin gilt das Folgende: Das Deuteron ist durch $s=1, m_s \in \{-1, 0, 1\}, t=0$ und $m_t=0$ und das Nukleon ist durch $\sigma = \frac{1}{2}, \mu_\sigma = \pm \frac{1}{2}, \tau = \frac{1}{2}$ und $\mu_\tau = +\frac{1}{2}$ für ein Proton bzw. $\mu_\tau = -\frac{1}{2}$ für ein Neutron festgelegt. Der Anfangszustand im Laborsystem wird also durch

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{\text{Lab}} &= |\psi_{\text{Deut}} \vec{K} s m_s t m_t, \vec{k} \sigma \mu_\sigma \tau \mu_\tau\rangle \\ &= |\psi_{\text{Deut}} \vec{K} 1 m_s 0 m_t, \vec{k} \frac{1}{2} \mu_\sigma \frac{1}{2} \mu_\tau\rangle \end{aligned} \quad (6.1)$$

beschrieben; die Energie ist

$$E_{\text{Ges}} = E_{\text{Deut}} + \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{4} K^2 + \frac{1}{2} k^2 \right) \quad (6.2)$$

und der Impuls ist

$$\vec{P} = \vec{K} + \vec{k}. \quad (6.3)$$

Im Endkanal hat man die Impulse $\vec{k}'_i$, die Spinquantenzahlen $\sigma'_i = \frac{1}{2}$ und $\mu'_{\sigma'_i} \in \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$ und die Isospinquantenzahlen τ'_i .

Bei den magnetischen Quantenzahlen μ_{τ_i}' muß festgelegt werden, wie die Nukleonen numeriert werden; diese Numerierung sei so bestimmt: Nukleon 1 und 2 werden in den beiden Detektoren in Konzidenz registriert; so sind die Richtungen $\hat{k}_1'$ und $\hat{k}_2'$ festgelegt, und die Impulsbeträge k_1' und k_2' bzw. die Energien E_1' und E_2' können gemessen werden. Je nach Wahl der Detektoren (Neutronen- oder Protonendetektoren) gibt es die drei Fälle:

$|pnn\rangle$, $|n pn\rangle$ und $|nnp\rangle$.

Für die μ_{τ_i}' folgt daher:

$$|\mu_{\tau_1}' \mu_{\tau_2}' \mu_{\tau_3}'\rangle = \begin{cases} |\frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle & \text{für } |pnn\rangle \\ |-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle & \text{für } |n pn\rangle \\ |-\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle & \text{für } |nnp\rangle. \end{cases} \quad (6.4)$$

Der Endzustand, der durch die gestrichenen Größen beschrieben werden soll, hat also die Form

$$|\Phi'\rangle_{\text{Lab}} = |\vec{k}_1' \mu_{\sigma_1}' \mu_{\tau_1}' \vec{k}_2' \mu_{\sigma_2}' \mu_{\tau_2}' \vec{k}_3' \mu_{\sigma_3}' \mu_{\tau_3}'\rangle. \quad (6.5)$$

Spin und Isospin sind wegen $\sigma_i' = \tau_i' = \frac{1}{2}$ weggelassen worden. Die Gesamtenergie ist

$$E'_{\text{Ges}} = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{2} k_1'^2 + \frac{1}{2} k_2'^2 + \frac{1}{2} k_3'^2 \right) \quad (6.6)$$

und der Gesamtspinimpuls ist

$$\vec{P}' = \vec{k}_1' + \vec{k}_2' + \vec{k}_3'. \quad (6.7)$$

Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit braucht man die S-Matrix, die durch

$$\begin{aligned} \langle \Phi' | S_{01} | \Phi \rangle_{\text{Lab}} &= \langle \Phi' | \Omega_0^{(-)\dagger} (1+P) \Omega_1^{(+)} | \Phi \rangle_{\text{Lab}} \\ &= -2\pi i \langle \Phi' | \delta(E_{\text{Ges}} - E_0) T_{01}(E_{\text{Ges}} + i\epsilon) | \Phi \rangle_{\text{Lab}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

gegeben ist. Die δ -Funktion mit dem freien Hamiltonoperator kann aus dem Matrixelement herangezogen werden und das verbleibende Matrixelement des Aufbruchoperators T_{01} wird in ein Schwerpunktssystem-Matrixelement umgeschrieben:

$$\langle \Phi' | S_{01} | \Phi \rangle_{Lab} = -2\pi i \delta(E'_{Ges} - E_{Ges}) \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \langle \Phi' | T_{01}(E + i\epsilon) | \Phi \rangle. \quad (6.9)$$

Hier ist nun T_{01} der in (5.36) definierte Aufbruchoperator zur Gesamtenergie E im Schwerpunktsystem. Der Zusammenhang zwischen E und E_{Ges} ist: $E = E_{Ges} - \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{2} p^2$. Die δ -Funktionen in (6.9) sorgen für die Erhaltung von Energie und Impuls. Es hat also zu gelten: $E'_{Ges} = E_{Ges}$, $\vec{p}' = \vec{p}$. Die Zustände in (6.9) sind durch

$$|\tilde{\Phi}'\rangle = |\vec{p}' \vec{q}' \mu'_{t_1} \mu'_{t_2} \mu'_{t_3} \mu'_{t_4} \mu'_{t_5} \mu'_{t_6}\rangle \quad (6.10)$$

und

$$|\tilde{\Phi}\rangle = |\psi_1 \vec{q}_0 1 m_s \frac{1}{2} \mu_\sigma 0 0 \frac{1}{2} \mu_\tau \rangle \quad (6.11)$$

gegeben. Dabei sind $\vec{p}'$ und $\vec{q}'$ die zu $\vec{k}'_1$, $\vec{k}'_2$ und $\vec{k}'_3$ gehörenden Jacobi-Impulse zum Koordinatensystem 1, und für $\vec{q}_0$ gilt wegen (2.5) und (2.12): $\vec{q}_0 = \frac{2}{3} \vec{k} - \frac{1}{3} \vec{K} = \frac{2}{3} \vec{p}$, weil $\vec{K} = 0$ sein soll. Da die Aufbruchamplitude als Matrixelement zwischen den Zuständen $|\vec{p}' \vec{q}' s'\rangle$ und $|\psi_1 \vec{q}_0 s_0\rangle$ (vergl. Gleichung (5.62)) gegeben ist, müssen $|\tilde{\Phi}'\rangle$ und $|\tilde{\Phi}\rangle$ umgekoppelt werden:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}'\rangle = \sum_{\substack{s'm'_1 S M'_3 \\ t' m'_1 T M'_T}} |\vec{p}' \vec{q}' s'\rangle \langle \frac{1}{2} \mu'_{t_2} \frac{1}{2} \mu'_{t_3} | s' m'_1 \rangle \langle s' m'_1 \frac{1}{2} \mu'_{t_4} | S M'_3 \rangle \\ \cdot \langle \frac{1}{2} \mu'_{t_5} \frac{1}{2} \mu'_{t_6} | t' m'_1 \rangle \langle t' m'_1 \frac{1}{2} \mu'_{t_7} | T M'_T \rangle \end{aligned} \quad (6.12)$$

und

$$|\tilde{\Phi}\rangle = \sum_{S M_s T M_T} |\psi_1 \vec{q}_0 s_0\rangle \langle 1 m_s \frac{1}{2} \mu_\sigma | S M_s \rangle \langle 0 m_t \frac{1}{2} \mu_\tau | T M_T \rangle. \quad (6.13)$$

Nun kann die Übergangswahrscheinlichkeit W für das Laborsystem definiert werden: W ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zu einem vorgegebenen Anfangszustand $|\Phi\rangle_{Lab}$ der Endzustand $|\Phi'\rangle_{Lab}$ in dem Phasenraumvolumen ΔV liegt, das eine Umgebung des Zustandes $|\Phi'\rangle_{Lab}$ bildet. Da weder Strahl noch Target polarisiert sein sollen, muß über die Spinrichtungen des Anfangszustandes, die durch m_s und μ_σ gegeben sind, gemittelt werden; auch im Endkanal soll nicht nach bestimmten Spinrichtungen abgefragt werden, weshalb über die Spineinstellungen $\mu_{\sigma'_1}$, $\mu_{\sigma'_2}$ und $\mu_{\sigma'_3}$ zu summieren ist. Damit ergibt sich

$$W = \frac{1}{6} \sum_{m_s, \mu_\sigma} \sum_{\mu_{\sigma'_1}, \mu_{\sigma'_2}, \mu_{\sigma'_3}} \int_{\Delta V} |\langle \Phi' | S_{01} | \Phi \rangle_{Lab}|^2 d^3(k'_1 k'_2 k'_3). \quad (6.14)$$

Der Faktor $\frac{1}{6} = \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{1}{2\sigma+1}$ tritt wegen der Spinmittlung auf.

Der übliche Rechenweg zur Herleitung der Formel für den Aufbruchswirkungsquerschnitt soll hier nicht vorgeführt werden [Gol 64], sondern sofort das Endergebnis angegeben werden [Ohl 65]:

$$\frac{d\sigma}{dE'_1 d\hat{k}'_1 d\hat{k}'_2} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar |\vec{v} - \vec{v}'|} g_1(E'_1, \hat{k}'_1, \hat{k}'_2) |M|^2 \quad (6.15)$$

mit

$$|M|^2 = \frac{1}{6} \sum_{m_s, \mu_\sigma} \sum_{\mu_{\sigma'_1}, \mu_{\sigma'_2}, \mu_{\sigma'_3}} |\langle \Phi' | T_{01} | \Phi \rangle|^2. \quad (6.16)$$

Dabei sind $|\tilde{\Phi}\rangle$ und $|\tilde{\Phi}'\rangle$ die in (6.10) und (6.11) definierten Zustände. Die Geschwindigkeit der Neutronen im Strahl ist $\vec{v}$. Da wegen $\vec{K} = 0$ auch die Geschwindigkeit der Targetdeuteronen verschwindet (also $\vec{v}' = 0$), gilt: $|\vec{v} - \vec{v}'| = \frac{\hbar}{m} |\vec{k}| = \frac{\hbar}{m} p$.

Der Zusammenhang zwischen dem Gesamtimpuls P , dem Schwerpunktsimpuls q_0 und E_{lab} , der Einschußenergie der Neutronen ist:

$$E_{lab} = \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{2} P^2 = \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{9}{2} q_0^2 \quad (6.17)$$

In (6.16) müssen noch Spin und Isospin gemäß (6.12) und (6.13) umgekoppelt werden, um $|M|^2$ durch die Amplituden $T_{s't'}^{(2)S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0)$ und $\hat{T}^{(3)S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0)$ darstellen zu können. Je nach Wahl der Isospinquantenzahlen ergibt sich (vergl. (6.4)):

$$|M_{pn n}|^2 = \frac{1}{9} \sum_{s'S} (2S+1) |M_{s'S}^S|^2, \quad (6.18)$$

$$|M_{np n}|^2 = \frac{1}{36} \sum_{s'S} (2S+1) |M_{s'S}^S + \sqrt{3} M_{s'S}^S|^2, \quad (6.19)$$

$$|M_{nn p}|^2 = \frac{1}{36} \sum_{s'S} (2S+1) |M_{s'S}^S - \sqrt{3} M_{s'S}^S|^2 \quad (6.20)$$

mit

$$M_{s't'}^S = \langle \vec{p}' \vec{q}' | T_{01} | \psi_1 \vec{q}_0 \rangle = \langle \vec{p}' \vec{q}' | (1+P) \hat{T}_{01} | \chi_1 \vec{q}_0 \rangle. \quad (6.21)$$

Mit der abgekürzten Schreibweise

$$T_{s't'}^{(2)S}(i) = T_{s't'}^{(2)S}(\vec{p}_i', \vec{q}_i', \vec{q}_0), \quad (6.22)$$

$$\hat{T}^{(3)S}(i) = \hat{T}^{(3)S}(\vec{p}_i', \vec{q}_i', \vec{q}_0), \quad (6.23)$$

wo $(\vec{p}_2', \vec{q}_2')$ und $(\vec{p}_3', \vec{q}_3')$ die gemäß (2.7) und (2.8) zu $\vec{p}_1' = \vec{p}'$ und $\vec{q}_1' = \vec{q}'$ gehörenden anderen Jacobi-Koordinaten sind, können die Permutationen $(1+P)$ so dargestellt werden:

$$\begin{aligned} M_{s't'}^S &= T_{s't'}^{(2)S}(1) + \sum_{s''t''} \Lambda_{s''s'}^S \Lambda_{t''t'}^T \left[(-1)^{s''+t''} T_{s't'}^{(2)}(2) + (-1)^{s'+t'} T_{s't'}^{(2)}(3) \right] \\ &+ \alpha_{s't'}^S \hat{T}^{(3)S}(1) + \sum_{s''t''} \Lambda_{s''s'}^S \Lambda_{t''t'}^T \left[(-1)^{s''+t''} \alpha_{s''t''}^S \hat{T}^{(3)S}(2) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{s'+t'} \alpha_{s't'}^S \hat{T}^{(3)S}(3) \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Mit (5.82) kann die zweite Summe in (6.24) ausgeführt werden:

$$M_{s't'}^S = T_{s't'}^{(2)S}(1) + \sum_{s''t''} \Lambda_{s''s''}^S \Lambda_{t''t''}^T \left[(-1)^{s''+t''} T_{s''t''}^{(2)S}(2) + (-1)^{s'+t'} T_{s''t''}^{(2)S}(3) \right] \\ + a_{s't'}^S \left[\hat{T}^{(1)S}(1) + \hat{T}^{(3)S}(2) + \hat{T}^{(3)S}(3) \right] \quad (6.26)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Amplituden $T_{s''t''}^{(2)S}$ und $T_{s''t''}^{(2)S}$, die in (6.26) auftreten, verschwinden, weil $(-1)^{s'+t'} = -1$ nicht erfüllt ist.

Gleichung (6.26) muß in die Gleichungen (6.18), (6.19) und (6.20) eingesetzt werden. Damit hat man das Ziel erreicht: Das Amplitudenquadrat $|M|^2$, der Anteil also, der die Dynamik enthält, ist somit auf die im letzten Kapitel definierten Amplituden zurückgeführt. Im nächsten Abschnitt wird der Anteil des Wirkungsquerschnitts, der die Kinematik beschreibt, nämlich der bis jetzt noch nicht erwähnte Phasenraumfaktor $\rho_1(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2)$ erläutert.

6.2 Phasenraumfaktor und kinematische Kurven

Der Phasenraumfaktor $\rho_1(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2)$, der ein faktoreller Anteil des Aufbruchwirkungsquerschnittes ist, läßt sich so definieren: Die Zahl der Ereignisse $\Delta N(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2)$, die in das Phasenraumvolumenelement ΔV in der Umgebung von $E_1, \hat{k}_1$ und $\hat{k}_2$ fallen, ist durch

$$\Delta N(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2) = \int_{\Delta V} \delta(E_{\text{Ges}}'' - E_{\text{Ges}}) \delta(\vec{p}'' - \vec{p}) d^3(k_1'' k_2'' k_3'') \quad (6.27)$$

gegeben. (Man beachte, daß von nun an die Striche zur Kennzeichnung der Endzustandsgrößen weggelassen werden.) Die δ -Funktionen

in (6.27) sorgen für Energie- und Impulserhaltung. So werden die neun Impulskomponenten der drei Nukleonenimpulse auf fünf unabhängige Größen, also zum Beispiel E_1 , $\hat{k}_1$ und $\hat{k}_2$ (die Richtungen $\hat{k}_1$ und $\hat{k}_2$ müssen jeweils durch zwei Winkel dargestellt werden), zurückgeführt. Die $\vec{k}_3$ -Integration in (6.27) kann mit der impulserhaltenden δ -Funktion ausgeführt werden:

$$\Delta N_1(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2) = \int_{AV} \frac{m}{k^2} \int \delta(k_1^2 + k_2^2 - \vec{P} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + k_1^2) d^3(k_1, k_2). \quad (6.28)$$

Dabei wurde $E_{\text{Ges}} = E_{\text{lab}} + E_{\text{Deut}} = \frac{k^2}{m} \left(\frac{1}{2} p^2 - \kappa_1^2 \right)$ ausgenutzt. Eliminieren der k_3 -Integration in (6.28) ergibt:

$$\Delta N(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2) = \int_{AV} g_1(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2) dE_1'' d\hat{k}_1'' d\hat{k}_2'' \quad (6.29)$$

mit dem Phasenraumfaktor

$$g_1(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2) = \left(\frac{m}{k^2} \right)^2 \frac{k_1^2 k_2^2}{|2k_2^2 - \vec{P} \cdot \vec{k}_2 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2|} \quad (6.30)$$

Dabei ist k_2 der sich aus der Auswertung der δ -Funktion ergebende Impuls. Wegen (6.29) kann g_1 auch als Dichte der Zustände aufgefaßt werden, die zur Gesamtenergie E_{Ges} und zum Gesamtimpuls $\vec{P}$ gehören.

Bei der Aufbruchreaktion liegen die Richtungen $\hat{k}_1$ und $\hat{k}_2$ durch die Positionen der Detektoren, die Teilchen 1 und 2 registrieren, fest. Die Laborwinkel sind also durch

$$\cos \theta_i = \hat{k}_i \cdot \hat{P} \quad (6.31)$$

und

$$\begin{aligned} \cos \theta_{ij} &= \hat{k}_i \cdot \hat{k}_j \\ &= \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \end{aligned} \quad (6.32)$$

gegeben. Die Azimutwinkel φ_i müssen auf eine Ebene im Labor, in der der Strahl liegt, bezogen sein.

Impuls- und Energiehaltung schränken die in den Detektoren registrierten Energien E_1 und E_2 bzw. Impulse k_1 und k_2 ein: Erlaubt sind die Impulse, für die das Argument der δ -Funktion in (6.28) verschwindet; es gilt also die Gleichung:

$$k_1^2 + k_2^2 - P(k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2) + k_1 k_2 \cos \theta_{12} + \kappa_1^2 = 0. \quad (6.33)$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine Ellipse in der k_1 - k_2 -Ebene; diese Ellipse werde ich mit "Impulsellipse" bezeichnen. Physikalisch ist nur der Teil der Impulsellipse, der im ersten Quadranten liegt. Für diese positiven Impulse kann (6.33) in eine Gleichung für die Energien E_1 und E_2 umgeschrieben werden:

$$E_1 + E_2 - \sqrt{E_{lab}} E_1 \cos \theta_1 - \sqrt{E_{lab}} E_2 \cos \theta_2 + \sqrt{E_1 E_2} \cos \theta_{12} - \frac{1}{2} E_{Det} = 0. \quad (6.34)$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung in der E_1 - E_2 -Ebene wird kinematische Kurve genannt. Die physikalisch möglichen Ereignisse können nur auf dieser kinematischen Kurve liegen. Es ist daher zweckmäßiger, den Wirkungsquerschnitt nicht wie in (6.15) als Funktion von E_1 sondern als Funktion von der Bogenlänge S dieser kinematischen Kurve zu schreiben. In (6.15) ist nämlich Folgendes von Nachteil: Der Nenner in (6.30) kann verschwinden, deshalb kann der Phasenraumfaktor unendlich werden; weil (6.33) eine quadratische Gleichung ist, kann es zu E_1 zwei verschiedene kinematisch erlaubte Werte für E_2 , somit auch zwei Werte für

den Wirkungsquerschnitt geben.

Für das Bogenelement gilt:

$$dS = \sqrt{dE_1 + dE_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dE_2}{dE_1}\right)^2} dE_1. \quad (6.35)$$

Mit Hilfe von (6.34) wird daraus die Bogenlänge S aufintegriert. Die Bogenlänge S soll anwachsen, wenn die kinematische Kurve im positiven Sinne durchfahren wird. Falls Nullstellen auf der E_1 -Achse vorhanden sind, soll bei der rechten E_1 -Nullstelle begonnen werden; falls keine Nullstellen auf der E_1 - aber dafür auf der E_2 -Achse vorhanden sind, wird bei der kleineren der beiden $S=0$ gesetzt. Falls die Kurve ganz im ersten Quadranten liegt, sei $S=0$ an dem Punkt, der von den beiden durch $\frac{dk_2}{dk_1} = 1$ gegebenen der E_1 -Achse näher liegt. Der Phasenraumfaktor längs der kinematischen Kurve hat dann die Form

$$\begin{aligned} \varrho_S(S, \hat{k}_1, \hat{k}_2) &= \frac{dE_1}{dS} \varrho_1(E_1, \hat{k}_1, \hat{k}_2) \\ &= \left(\frac{m}{k_1^2}\right)^2 \frac{k_1^2 k_2^2}{\sqrt{k_1^2 (2k_2 - P \cos \theta_2 + k_1 \cos \theta_{12})^2 + k_2^2 (2k_1 - P \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_{12})^2}}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

was immer endlich bleibt, und für den Wirkungsquerschnitt gilt dann

$$\frac{d\sigma}{dS d\hat{k}_1 d\hat{k}_2} = \frac{m}{k^2} \frac{(2\pi)^4}{P} \varrho_S(S, \hat{k}_1, \hat{k}_2) |M|^2. \quad (6.37)$$

Im Folgenden steht die Bezeichnung Aufbruchwirkungsquerschnitt immer für diese Form (6.37).

Zu den vorgegebenen Laborwinkeln $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$ und φ_2 muß also die kinematische Kurve berechnet werden. Für jeden Punkt (E_1, E_2) auf der kinematischen Kurve müssen die Koordinaten des dritten Nukleons $(E_3, k_3, \theta_3$ und $\varphi_3)$ mit Hilfe von Impuls- und Energie-

erhaltung bestimmt werden. Da die Amplituden $T_{st}^{(2)S}(i)$ und $\bar{T}^{(2)S}(i)$ Funktionen der Jacobi-Koordinaten sind, müssen auch diese berechnet werden:

$$q_i = \sqrt{k_i^2 + \frac{1}{8} p^2 - \frac{2}{3} p k_i \cos \theta_i} \quad (6.38)$$

$$p_i = \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{4} q_i^2} \quad (6.39)$$

und

$$\cos \theta_i = \hat{q}_i \cdot \hat{q}_0 = \frac{k_i \cos \theta_i - \frac{1}{3} p}{q_i} \quad (6.40)$$

Die Azimutwinkel für $\vec{k}_i$ und $\vec{q}_i$ sind gleich. Damit ist der Zusammenhang des Wirkungsquerschnittes mit den kinematischen und dynamischen Größen beschrieben.

6.3 Spezielle Konfigurationen im Phasenraum

Da in dieser Arbeit der Einfluß des Dreinukleonenpotentials auf den Aufbruchwirkungsquerschnitt untersucht werden soll, muß also genau überlegt werden, wie man aus der Fülle der möglichen Aufbruchexperimente, die durch die Laborwinkel $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$ und φ_2 beschrieben werden, eine repräsentative Auswahl trifft. Da weder Strahl noch Target polarisiert sein sollen, existiert also keine ausgezeichnete Ebene im Laborsystem, deshalb geht nur die Differenz $\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$ in den Wirkungsquerschnitt ein. Es kann also $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \varphi_{12}$ gesetzt werden. Somit hat man die drei Winkel θ_1, θ_2 und φ_{12} , die eine Impulsellipse bzw. kinematische Kurve festlegen; diese drei Winkel können zwischen 0° und 180° gewählt werden (die Fälle mit $180^\circ < \varphi_{12} < 360^\circ$ verhalten sich wegen (6.32) wie die mit $360^\circ - \varphi_{12}$).

Zuerst muß überlegt werden, welche Winkelkombinationen auf Grund von Impuls- und Energieerhaltung verboten sind. Aus der Gleichung für die Impulsellipse (6.23) ergeben sich die Werte für die extremalen Impulse zu

$$k_1^{(\pm)} = \frac{\cos \theta_1 - \frac{1}{2} \cos \theta_2 \cos \theta_{12} \pm \sqrt{D}}{2 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{12}} \quad P \quad (6.41)$$

und

$$k_2^{(\pm)} = \frac{\cos \theta_2 - \frac{1}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_{12} \pm \sqrt{D}}{2 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{12}} \quad P \quad (6.42)$$

mit

$$D = \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_{12} - \frac{\kappa_1^2}{P^2} (4 - \cos^2 \theta_{12}) \quad (6.43)$$

Falls D verschwindet, gilt $k_1^{(-)} = k_2^{(+)}$ und $k_2^{(-)} = k_1^{(+)}$, das heißt, die Impulsellipse ist zu einem einzigen Punkt entartet. Somit stellt Gleichung (6.43) mit D=0 die Bestimmungsgleichung für die Laborwinkel θ_1 und θ_2 zu einem fest vorgegebenen Winkel φ_{12} dar, für die sich die Impulsellipse zu einem Punkt zusammengezogen hat. Diese Winkelpaare (θ_1, θ_2) liegen für $E_{lab} = 14,4 \text{ MeV}$ und für verschiedene Werte von φ_{12} (0° , 90° , 120° und 180°) auf den mit 1 gekennzeichneten Kurven der Abbildungen 6.1 bis 6.4; diese Kurven umranden den engschraffierten Bereich. Eine spezielle Lösung von (6.43) mit D=0 und $\varphi_{12}=180^\circ$ ist durch $\theta_{Verb} = \theta_1 = \theta_2$ gegeben:

$$\theta_{Verb} = \sqrt{\frac{\kappa_1^2}{P^2 - 2\kappa_1^2}}$$

Für verschiedene Laborenergien ist θ_{Verb} in Tabelle 6.1 aufgeführt.

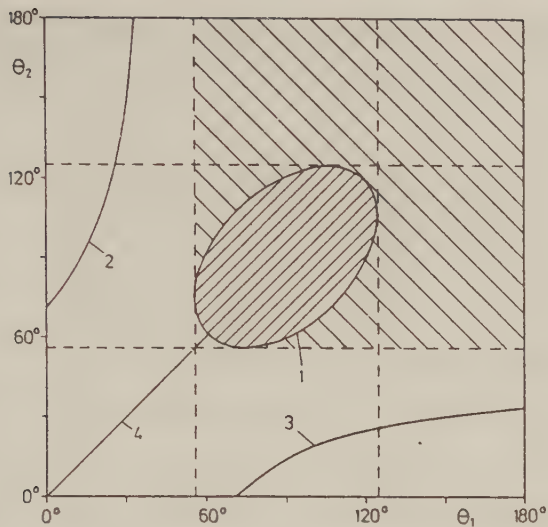


Abbildung 6.1: Spezielle Laborwinkel zu $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$ und $\varphi_k=0^\circ$; Kurve 1: Rand des verbotenen Gebietes, Kurve 2 und 3: Winkel für Sternkonfigurationen, Kurve 4: Winkel für 1-2-FSI

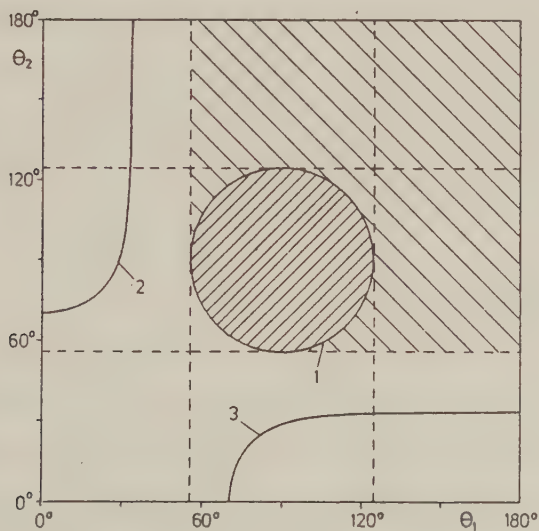


Abbildung 6.1: Spezielle Laborwinkel zu $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$ und $\varphi_k=90^\circ$; Kurve 1, 2 und 3 wie in Abb. 6.1

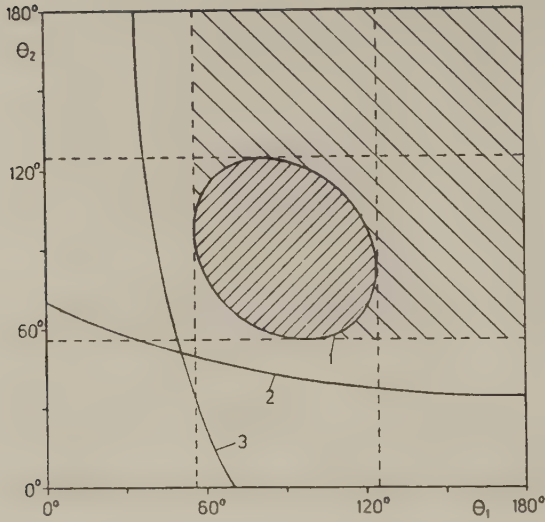


Abbildung 6.3: Spezielle Laborwinkel zu $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$ und $\varphi_{12}=120^\circ$; Kurve 1, 2 und 3 wie in Abb. 6.1

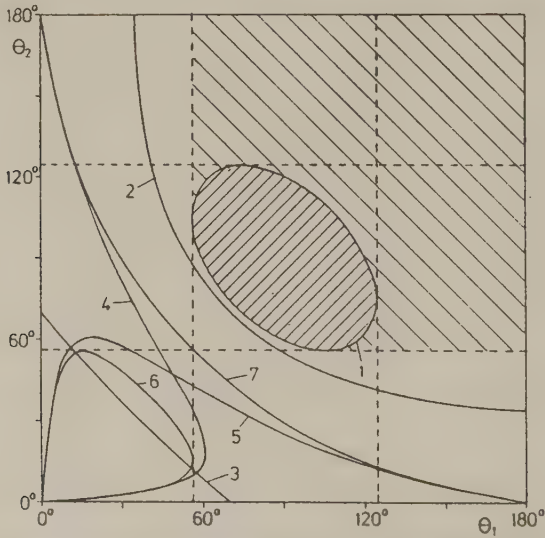


Abbildung 6.4: Spezielle Laborwinkel zu $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$ und $\varphi_{12}=180^\circ$; Kurve 1, 2 und 3 wie in Abb. 6.1, Kurve 4: Winkel für 1-3-FSI, Kurve 5: Winkel für 2-3-FSI, Kurve 6: Winkel für QFS, Kurve 7: Winkel für kollineare Konfiguration ($\vec{q}_3=0$)

E_{lab}/MeV	θ_{verb}	θ_{FSI}^{max}	θ_{FSI}^{sym}	θ_{QFS}^{max}	θ_{QFS}^{sym}	θ_{Koll}^{sym}	$\theta_{Stern}^{sym,1}$	$\theta_{Stern}^{sym,2}$	θ_{Stern}^{senk}
7,5	62,22°	47,62°	42,82°	38,89°	32,12°	51,99°	30,72°	62,16°	46,25°
9,5	66,64°	53,21°	45,41°	46,24°	35,84°	54,21°	32,05°	66,14°	48,55°
14,4	72,18°	60,89°	48,14°	55,82°	39,60°	56,54°	33,48°	70,34°	51,02°
22,7	76,36°	67,20°	49,79°	63,42°	41,81°	57,94°	34,35°	72,86°	52,51°
∞	90°	90°	52,24°	90°	45°	60°	35,66°	76,55°	54,74°

Tabelle 6.1: Spezielle Winkel im Laborsystem

Falls D negativ ist, existieren keine reellen Lösungen (k_1, k_2) der Gleichung (6.33), und die Winkel θ_1 und θ_2 sind für das vorgegebene $\mathcal{P}_{22}$ kinematisch nicht erlaubt. Diese verbotenen Winkel liegen in dem engschraffierten Bereich, der "verbotenes Gebiet" genannt werden soll.

Mit $D=0$ sind jedoch noch nicht alle verbotene Winkelkombinationen ausgeschlossen; eine weitere Voraussetzung für die Existenz einer kinematischen Kurve ist, daß die Impulsellipse zumindest teilweise im ersten Quadranten der k_1 - k_2 -Ebene liegt. Es hat also zu gelten: $k_1^{(+)} > 0$ und $k_2^{(+)} > 0$. Die Lage der Impulsellipse läßt sich am besten durch ihre Schnittpunkte, falls vorhanden, mit den Achsen feststellen. Aus (6.33) folgen die Schnittpunkte mit der k_1 -Achse, indem man $k_2=0$ setzt:

$$k_{10} = \left(\frac{1}{2} \cos \theta_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \theta_1 - \frac{x_1^2}{p^2}} \right) P \quad (6.44)$$

Die Schnittpunkte auf der k_1 -Achse hängen also allein von θ_1 ab. Eine analoge Beziehung folgt für die Schnittpunkte mit der k_2 -Achse. Der Radikant in (6.44) verschwindet, falls $\cos^2 \theta_1 = \frac{4x_1^2}{p^2}$ gilt. Dies definiert den Winkel θ_{QFS}^{max} , dessen Bedeutung für die QFS-Konfiguration weiter unten klar wird, durch

$$\cos \theta_{QFS}^{\max} = \frac{2x_1}{p} = \sqrt{\frac{2|E_{Deut}|}{E_{lab}}} \quad (6.45)$$

Dieser Winkel $\theta_{QFS}^{\max}$ existiert nur, wenn $E_{lab} \geq 2|E_{Deut}|$ ist. Falls also $E_{lab} > 2|E_{Deut}|$ ist, sind Schnittpunkte der Impulsellipsen mit den Achsen möglich: Für $0^\circ \leq \theta_1 \leq \theta_{QFS}^{\max}$ liegen beide Schnittpunkte wegen (6.44) auf der positiven k_1 -Achse, für $180^\circ - \theta_{QFS}^{\max} \leq \theta_1 \leq 180^\circ$ liegen beide auf der negativen k_1 -Achse und für $\theta_{QFS}^{\max} < \theta_1 < 180^\circ - \theta_{QFS}^{\max}$ gibt es keine Schnittpunkte. Analoges gilt für θ_2 und die Schnittpunkte auf der k_2 -Achse.

In den Abbildungen 6.1 bis 6.4 sind die Winkel $\theta_{QFS}^{\max}$ und $180^\circ - \theta_{QFS}^{\max}$ durch die gestrichelten waagerechten und senkrechten Geraden dargestellt. Diese Geraden begrenzen das verbotene Gebiet; dies läßt sich mit Hilfe von (6.43) mit $D=0$ zeigen: Für $\theta_1 = \theta_{QFS}^{\max}$ oder $\theta_1 = 180^\circ - \theta_{QFS}^{\max}$ berührt die Impulsellipse die k_1 -Achse in genau einem Punkt.

Abhängig davon, ob Achsenschnittpunkte existieren, kann die Lage der Impulsellipse in der k_1 - k_2 -Ebene so angegeben werden: Die Ellipse liegt ganz in einem der vier Quadranten (vier Fälle), sie liegt in zwei Quadranten (vier Fälle) oder sie liegt in drei Quadranten (vier Fälle). Da die Schnittpunkte immer nur auf der positiven oder negativen Achsenhälfte liegen können, kann sich die Ellipse nicht über alle vier Quadranten erstrecken. Bei sechs von diesen zwölf Fällen reicht die Ellipse nicht in den ersten Quadranten hinein; diese Fälle sind also unphysikalisch, da ja k_1 und k_2 als Impulsbeträge positiv sein müssen. In den Abbildungen 6.1 bis 6.4 liegen die Laborwinkel zu diesen unphysikalischen Impulsellipsen in dem weitschraffierten Gebiet.

Nur zu Laborwinkeln (θ_1, θ_2), die nicht in den schraffierten Gebieten liegen, existieren also kinematische Kurven in der E_1 - E_2 -Ebene.

Außer diesen physikalischen Bedingungen, die für ein vorgegebenes φ_{12} den Bereich der erlaubten Laborwinkel θ_1 und θ_2 einschränken, gibt es weitere, die auf Grund experimenteller Gegebenheiten folgen. Wenn das Winkelpaar (θ_1, θ_2) zu dicht am verbotenen Gebiet liegt, ist die Impulsellipse, und damit auch die kinematische Kurve, schon fast zu einem Punkt entartet. Wegen der endlichen Energieauflösung der Detektoren lassen sich dann die Punkte auf der kinematischen Kurve nicht mehr trennen. Falls ein Detektor unter Rückwärtswinkeln aufgestellt ist, ist die maximale Energie der dort ankommenden Teilchen klein. Dies ist gerade für Neutronendetektoren ungünstig, da diese Neutronen mit weniger als 1 MeV nur schlecht registrieren. Ungünstig ist es auch, unter extremen Vorwärtswinkeln zu messen. Die Detektoren stehen daher gewöhnlich unter Winkeln zum Strahl, die mehr als 10° betragen.

Statt systematisch mit einer gewissen Diskretisierung die Winkel θ_1, θ_2 und φ_{12} innerhalb des oben eingeschränkten Gebietes zu variieren und auf den zugehörigen kinematischen Kurven den Wirkungsquerschnitt anzugeben, kann man sich auf spezielle Winkelkombinationen beschränken, die sich dadurch auszeichnen, daß es Punkte auf den zugehörigen kinematischen Kurven gibt, bei denen die drei Nukleonenimpulse eine bestimmte geometrische Konfiguration bilden. Diese Konfigurationen sollen nun im Folgenden besprochen werden; insbesondere sollen die Formeln angegeben

werden, mit denen die Laborwinkel für diejenigen kinematischen Kurven berechnet werden, auf denen diese Konfigurationen auftreten.

"Final-state-interaction"

Die "Final-state-interaction" (FSI) ist eine Konfiguration im Endkanal, die experimentell sehr oft untersucht worden ist, weil der Wirkungsquerschnitt einen Peak hat. Die FSI ist dadurch bestimmt, daß die Relativenergie eines Zwei-Teilchen-Subsystems sehr klein ist oder sogar verschwindet. Das bedeutet, daß die beiden Nukleonen relativ lange Zeit dicht beisammen bleiben, der Wirkungsquerschnitt wird also sehr stark durch die Wechselwirkung in diesem Subsystem bestimmt. Der Peak wird durch den Pol des Antiboundstates in der Singulett-T-Matrix verursacht; der Pol macht sich, weil die Antiboundstateenergie mit

$E_{\text{Anti}} \approx -65 \text{ keV}$ relativ klein ist, auf der reellen Achse bei kleinen Zweiteilchenenergien noch stark bemerkbar. Es sollen nur die Konfigurationen betrachtet werden, bei denen die Relativenergie E_{rel} des Subsystems verschwindet; diese sollen "exakte" FSI-Konfigurationen genannt werden. Es wird sich zeigen, daß für die Konfigurationen, bei denen die Relativenergie nicht exakt verschwindet, dieselben Tendenzen sich zeigen.

Im Folgenden sollen die Formeln nur für die 1-3-FSI abgeleitet werden, die anderen Fälle ergeben sich einfach durch Teilchenpermutation. Die Bedingung ist also: Für die Relativenergie gilt

$$E_{\text{rel}} = E_{n_3} = 0, \text{ dann folgt für die Impulse: } \vec{p}_2 = 0, \vec{k}_1 = \vec{k}_2$$

(das heißt: $k_{\text{FSI}} = k_1 = k_3$, $\theta_{\text{FSI}} = \theta_1 = \theta_3$, $\varphi_1 = \varphi_3$). Der FSI-Winkel θ_{FSI} ,

der auch Produktionswinkel genannt wird, ist also der Winkel, den das auslaufende Subsystem zum Strahl bildet. Die 1-3-FSI ist nur für $\varphi_{12} = 180^\circ$ möglich. Aus Energie- und Impulserhaltung folgt dann nach Elimination der Koordinaten des zweiten Teilchens der gemeinsame Impuls k_{FSI} der beiden an der FSI beteiligten Nukleonen:

$$k_{FSI} = \frac{1}{2} P \cos \theta_{FSI} \pm \sqrt{\frac{1}{9} P^2 \cos^2 \theta_{FSI} - \frac{1}{3} x_1^2} \quad (6.46)$$

Das Verschwinden der Wurzel legt den größten Laborwinkel fest, unter dem noch die FSI möglich ist:

$$\cos \theta_{FSI}^{max} = \sqrt{3} \frac{x_1}{P} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{|E_{Deut}|}{E_{lab}}} \quad (6.47)$$

Aus (6.47) folgt, daß für alle Einschußenergien E_{lab} oberhalb der Aufbruchschwelle, die durch $E_{lab} = \frac{3}{2} |E_{Deut}|$ festliegt, die FSI möglich ist. Aus (6.46) ergeben sich wiederum mit Energie- und Impulserhaltung Impuls und Winkel des nicht an der FSI beteiligten Teilchens:

$$k_2^2 = P^2 - x_1^2 - 2 k_{FSI}^2 \quad (6.48)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{P - 2 k_{FSI} \cos \theta_{FSI}}{k_{FSI}} \quad (6.49)$$

und

$$\varphi_2 = \varphi_{12} = 180^\circ \quad (6.50)$$

In Abbildung 6.4 zeigt für $E_{lab} = 14,4 \text{ MeV}$ die Kurve 4 die möglichen Laborwinkelpaare (θ_1, θ_2) , bei denen die exakte 1-3-FSI auftritt, Kurve 5 stellt dasselbe für die 2-3-FSI dar. Der Schnittpunkt der beiden Kurven legt die symmetrische Kon-

stellation fest: Für θ_{FSI}^{sym} , das durch

$$\cos \theta_{FSI}^{sym} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{P}{\sqrt{\frac{1}{2} P^2 - \kappa_1^2}} \quad (6.51)$$

gegeben ist, folgt aus $\theta_1 = \theta_3 = \theta_{FSI}^{sym}$, daß auf dem 1-3-FSI-Punkt der kinematischen Kurve auch $\theta_2 = \theta_{FSI}^{sym}$ gilt; deshalb tritt auf derselben kinematischen Kurve auch der exakte 2-3-FSI-Peak auf.

Auch bei Winkeln (θ_1, θ_2) , die nicht exakt auf den Kurven 4 und 5 der Abbildung 6.4 liegen, ist im Wirkungsquerschnitt der FSI-Peak noch recht stark; gleiches gilt, falls φ_{12} nur in der Nähe von 180° liegt. An Hand von Tabelle 6.1, wo für verschiedene Einschußenergien die Winkel θ_{FSI}^{max} und θ_{FSI}^{sym} aufgeführt sind, wird deutlich, daß für die angegebenen Energien die Kurven für 1-3- und 2-3-FSI einen ähnlichen Verlauf haben wie die in Abbildung 6.4 für $E_{lab} = 14,4$ MeV dargestellten. Für die 1-2-FSI-Konfiguration gilt wegen $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$: $\theta_1 = \theta_2$ und $\varphi_{12} = 0^\circ$; die 1-2-FSI-Winkel liegen also auf dem Teil der Winkelhalbierenden zur θ_1 - und θ_2 -Achse, der vom Ursprung bis zum verbotenen Gebiet reicht (Kurve 4 in Abbildung 6.1).

Quasi-freie-Streuung

Wie bei der FSI ist die Quasi-freie-Streuung (QFS) durch Zwei-Teilchen-Effekte bestimmt, und im Wirkungsquerschnitt wird dies als Peak deutlich. Die QFS ist durch das Verschwinden der Laborenergie des Nukleons definiert, das nicht in den beiden Detektoren registriert wird. Es hat also $\vec{k}_3 = 0$ beziehungsweise $E_3 = 0$ für die exakte QFS zu gelten. Dieses Nukleon ist an der

Reaktion im wesentlichen unbeteiligt und geht in den Wirkungsquerschnitt nur durch seine Impulsverteilung ein. Dies ist aber genau die Impulsverteilung, die es vor der Reaktion hatte, wo es noch im Deuteron gebunden war; diese Impulsverteilung hat für $E_3=0$ ihr Maximum, dies führt zu dem Peak im Aufbruchwirkungsquerschnitt. Dieser Peak ist im allgemeinen breiter als bei der FSI.

Analog zur FSI ergibt sich bei vorgegebenem Laborwinkel θ_1 aus Energie- und Impulserhaltung:

$$k_1 = \frac{1}{2} P \cos \theta_1 \pm \sqrt{\frac{1}{2} P^2 \cos^2 \theta_1 - \kappa_1^2} . \quad (6.52)$$

Das Verschwinden der Wurzel legt den maximalen Laborwinkel fest, bei dem QFS noch möglich ist; dies ist der schon in (6.45) definierte Winkel θ_{QFS}^{max} . Aus (6.45) folgt, daß QFS nur für $E_{lab} > 2|E_{Deut}|$ möglich ist. Es gibt somit Energien E_{lab} oberhalb der Aufbruchschwelle, bei denen die exakte QFS mit $E_3=0$ nicht auftreten kann. Für die Größen des zweiten Nukleons ergibt sich:

$$k_2^2 = P^2 - k_1^2 - 2\kappa_1^2 , \quad (6.53)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{P - k_1 \cos \theta_1}{k_2} \quad (6.54)$$

und

$$\varphi_{12} \approx 180^\circ . \quad (6.55)$$

Der symmetrische Fall, bei dem $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{QFS}^{sym}$ und $k_1 = k_2$ gilt, ist durch

$$\cos \theta_{QFS}^{sym} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{1}{2}P^2 - \kappa_1^2}} \quad (6.56)$$

gegeben. Die Winkel θ_{QFS}^{max} und θ_{QFS}^{sym} sind für verschiedene Werte von E_{lab} in Tabelle 6.1 aufgeführt. In Abbildung 6.4 gibt für $E_{lab} = 14.4 \text{ MeV}$ die Kurve 6 die Laborwinkelpaare (θ_1, θ_2) an, bei denen auf der kinematischen Kurve der exakte QFS-Punkt mit $E_3 = 0$ liegt. Da diese Kurve immer in der Nähe der FSI-Kurven verläuft, hat man also neben dem QFS-Peak immer auch die mehr oder weniger starken 1-3- und 2-3-FSI-Peaks zu erwarten. Umgekehrt macht sich die QFS auch bei manchen FSI-Konfigurationen bemerkbar. Die Werte für θ_{QFS}^{max} und θ_{QFS}^{sym} in Tabelle 6.1 zeigen, daß bei Energien E_{lab} , die deutlich oberhalb der Schwelle $2|E_{Deut}$ liegen, die Form der Kurve sehr ähnlich ist wie bei Kurve 6 in Abb. 6.4.

Kollinearität

Im Gegensatz zu FSI und QFS gibt es für die kollineare Konfiguration keinen Mechanismus, der zu einer deutlichen Anhebung des Aufbruchquerschnittes führt. Auch experimentelle Hinweise auf derartige Peaks sind umstritten [Lam 75, Bir 79, Lek 81]. Die kollineare Konfiguration ist dadurch festgelegt, daß im Schwerpunktssystem die Impulse der Endkanalteilchen auf einer Geraden liegen. Es gelte also zum Beispiel $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2 - \vec{q}_3$ mit $\vec{q}_1 = c_{koll} \vec{q}_2$. Diese Gerade bilde mit der Einschubrichtung den Winkel α : $\hat{q}_0 \cdot \hat{q}_1 = \cos \alpha$. Somit sind alle kollinearen Konfigurationen durch die beiden Parameter c_{koll} und α eindeutig beschrieben. Für $c_{koll} = 1$ gilt $\vec{q}_2 = \vec{q}_3$, woraus $\vec{p}_1 = 0$ folgt: Die FSI ist also ein Spezialfall der Kollinearität. Für $c_{koll} \approx 1$ ist die Kollinearität immer in der Nähe der FSI. Es soll daher im Folgenden nur die kollineare Konfiguration mit $c_{koll} = 0$,

also der Fall $\vec{q}_3 = 0$, betrachtet werden. Aus Energie und Impulserhaltung folgt: $q_1 = q_2 = \gamma$, $\vartheta_1 = \alpha$ und $\vartheta_2 = 180^\circ - \alpha$. Umrechnung ins Laborsystem ergibt:

$$k_{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9} p^2 + \gamma^2 \pm \frac{2}{3} \gamma p \cos \alpha} \quad , \quad (6.57)$$

$$\cos \theta_{1/2} = \frac{\frac{1}{3} p \pm \gamma \cos \alpha}{k_{1/2}} \quad (6.58)$$

und

$$\varphi_{12} = 180^\circ .$$

Bei $\alpha = 90^\circ$ ergibt sich der symmetrische Fall mit $k_1 = k_2$ und

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{koll}}^{\text{sym}} :$$

$$\cos \theta_{\text{koll}}^{\text{sym}} = \frac{p}{\sqrt{4p^2 - q_1^2}} . \quad (6.59)$$

In der Tabelle 6.1 sind die Winkel $\theta_{\text{koll}}^{\text{sym}}$ für verschiedene Energien E_{lab} angegeben. In Abbildung 6.4 stellt für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$ die Kurve 7 die Laborwinkel zur kollinearen Konfiguration im engeren Sinne mit $\vec{q}_3 = 0$ dar. Auch hier wird deutlich, daß die Kollinearität auf den kinematischen Kurven immer in der Nähe der FSI auftritt.

Sternkonfiguration

Die Sternkonfiguration, die ich auch kurz mit "Stern" bezeichnen werde, ist wie die Kollinearität durch eine bestimmte Konfiguration im Schwerpunktssystem gegeben und ist auch nicht durch einen Peak im Wirkungsquerschnitt gekennzeichnet. Peaks gibt es nur, wenn der Stern mit einem wirkungsquerschnittsverstärkenden Zwei-Teilchen-Effekt zusammenfällt. Für die Schwerpunktskoordinaten der Sterne gilt:

$$q_{\text{Stern}} = q_1 = q_2 = q_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \quad (6.60)$$

und

$$\arccos(\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j) = 120^\circ, \quad i \neq j. \quad (6.61)$$

Aus (6.61) folgt die Bestimmungsgleichung für die Schwerpunkts-
winkel der Sternkonfiguration:

$$\hat{q}_1 \cdot \hat{q}_2 = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_{12} = -\frac{1}{2}. \quad (6.62)$$

Durch (6.60) und (6.62) sind alle Sterne erfaßt. Wenn man die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 , die Lösungen zu (6.62) sind, ins Laborsystem transformiert, erhält man die Winkel θ_1, θ_2 und φ_{12} , bei denen auf der zugehörigen kinematischen Kurve die Sternkonfiguration vorkommt. Für ein bestimmtes φ_{12} gibt es immer zwei Kurven mit derartigen Laborwinkeln θ_1 und θ_2 , wie die Kurven 2 und 3 in den Abbildungen 6.1 bis 6.4 zeigen.

Wegen $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0$ liegen die Vektoren $\vec{q}_i$ in einer Ebene. Wenn der Anfangsimpuls $\vec{q}_0$ in dieser Ebene liegt, heißt der Stern koplanar; im allgemeinen Fall ist der Stern um den Winkel gegenüber $\vec{q}_0$ geneigt (siehe Abbildung 6.5). Ein weiterer Winkel

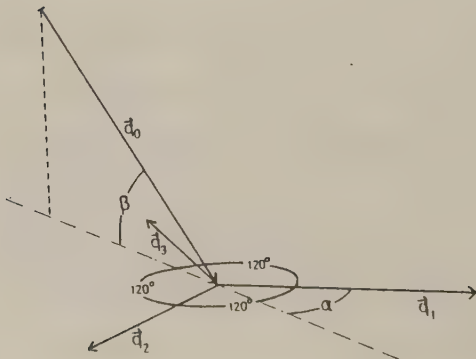


Abbildung 6.5: Winkel der Sternkonfiguration

ist notwendig, um den Stern genau im Raume festzulegen: α sei der Winkel, den die senkrechte Projektion von $\vec{q}_0$ auf die Ebene mit $\vec{q}_1$ bildet. Mit den Winkeln $\tilde{\mathcal{J}}_1 = \alpha$, $\tilde{\mathcal{J}}_2 = \alpha + 120^\circ$ und $\tilde{\mathcal{J}}_3 = \alpha + 120^\circ$ erhält man die Schwerpunktswinkel, für die gilt:

$$\cos \mathcal{J}_i = \cos \beta \cos \tilde{\mathcal{J}}_i \quad (6.63)$$

und

$$\tan \varphi_i = \sin \beta \cot \tilde{\mathcal{J}}_i \quad (6.64)$$

Daraus folgen die Laborgrößen:

$$k_i^2 = q_{\text{stern}}^2 + \frac{1}{9} P^2 + \frac{2}{3} P q_{\text{stern}} \cos \mathcal{J}_i \quad (6.65)$$

und

$$\cos \theta_i = \frac{\frac{1}{3} P + q_{\text{stern}} \cos \mathcal{J}_i}{k_i} \quad (6.66)$$

Für die koplanaren Sterne ($\beta = 0^\circ$) gilt: Kurve 3 in Abbildung 6.4 (zu $\varphi_m = 180^\circ$) ist durch $0 \leq \alpha \leq 120^\circ$, Kurve 3 in Abbildung 6.1 (zu $\varphi_m = 0^\circ$) durch $120^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, Kurve 2 in Abbildung 6.4 durch $180^\circ \leq \alpha \leq 300^\circ$ und Kurve 2 in Abbildung 6.1 durch $300^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ festgelegt.

Symmetrische koplanare Sternkonfigurationen sind durch $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{stern}}^{\text{sym}/2}$ gegeben mit

$$\cos \theta_{\text{stern}}^{\text{sym}/2} = \frac{\frac{1}{3} P \pm \frac{1}{2} q_{\text{stern}}}{\sqrt{q_{\text{stern}}^2 + \frac{1}{9} P^2 \pm \frac{1}{3} P q_{\text{stern}}}} \quad (6.67)$$

Die zugehörigen Schwerpunktswinkel sind $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 60^\circ$ bzw.

$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 120^\circ$. Ein weiterer symmetrischer Fall ist der senk-

rechte Stern, für den $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3 = 90^\circ$ gilt. Die zugehörigen

Laborwinkel $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_{\text{stern}}^{\text{senk}}$ sind durch

$$\cos \theta_{\text{stern}}^{\text{senk}} = \frac{P}{3 \sqrt{q_{\text{stern}}^2 + \frac{1}{9} P^2}} \quad (6.68)$$

gegeben. Dieser Winkel ist genau der durch den Schnittpunkt der Kurven 2 und 3 in Abbildung 6.3 gegebene Winkel. In Tabelle 6.11 sind die speziellen Winkel $\theta_{\text{Stern}}^{\text{sym 1/2}}$ und $\theta_{\text{Stern}}^{\text{senk}}$ für verschiedene Energien aufgeführt.

Ein großer Teil der Sternkonfigurationen eignet sich nur schlecht für ein Experiment. Für $\varphi_{12} < 120^\circ$ muß, wie die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen, ein Detektor unter Rückwärtswinkeln stehen, was ungünstig ist, wie am Anfang dieses Abschnittes erläutert worden ist. Gleiches gilt für einen Teil der Winkel, die auf Kurve 2 der Abbildung 6.4 zu $\varphi_{12} = 180^\circ$ liegen. Der mittlere Teil derselben Kurve scheidet auch aus, weil sie zu dicht am verbotenen Gebiet entlangführt. Für $E_{\text{lab}} = 3|E_{\text{Deut}}|$ gilt sogar $\theta_{\text{Stern}}^{\text{sym 2}} = \theta_{\text{Verb}} = 60^\circ$ und für $E_{\text{lab}} < 3|E_{\text{Deut}}|$ wird dieser Teil der Kurve vom verbotenen Gebiet verschluckt. Die Kurve 3 in Abbildung 6.4 verläuft in der Nähe der QFS-Kurve, somit ist der Wirkungsquerschnitt also stark durch diesen Zwei-Teilchen-Effekt beeinflusst. Für $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{Stern}}^{\text{sym 1}}$ fallen Stern- und QFS-Konfiguration zusammen und für $E_{\text{lab}} = 3|E_{\text{Deut}}|$ gilt sogar $\theta_{\text{Stern}}^{\text{sym 1}} = \theta_{\text{QFS}}^{\text{sym}} = 30^\circ$. Bei der Sternkonfiguration gilt somit exakt: $E_3 = 0$. Völlig unbeeinflusst von allen Zwei-Teilchen-Effekten ist hingegen der senkrechte Stern: Der Phasenraum ist in seiner Umgebung nahezu "eben".

Zusammenfassend kann gesagt werden: Der experimentell erfassbare Winkelbereich in θ_1 und θ_2 für $\varphi_{12} = 180^\circ$ ist im wesentlichen durch die vier oben beschriebenen Konfigurationen abgedeckt. Die weiteren koplanaren Konfigurationen, die auf den kinematischen Kurven zu $\varphi_{12} = 0^\circ$ liegen, lassen sich durch Teilchenpermutationen

in Konfigurationen zu $\varphi_n = 180^\circ$ überführen (zum Beispiel die 1-2-FSI in die 1-3-FSI). Auch die nicht koplanaren Konfigurationen, bei denen die Ebene, die durch $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$ aufgespannt ist, nur schwach gegen den Anfangsimpuls $\vec{q}_0$ geneigt ist, zeigen ähnliche Effekte wie die entsprechenden koplanaren. Somit bleibt als einzig interessante nicht koplanare Konfiguration der senkrechte Stern übrig. Dies wird die Diskussion der berechneten Wirkungsquerschnitte bestätigen.

7. Numerische Verfahren

In den vorhergehenden Kapiteln wurde deutlich, daß auf Grund von Singularitäten in verschiedenen Termen das Dreinukleonsystem bei der numerischen Behandlung besonderer Sorgfalt bedarf. Die numerischen Verfahren, die im einzelnen benutzt worden sind, sowie ihre Genauigkeit sollen in diesem Kapitel untersucht werden. Es wird im ersten Abschnitt mit dem Zwei-Nukleonen-System begonnen, wo die Berechnungsweise der UPA-Formfaktoren sowie ihre weitere Verarbeitung in Zwei- und Dreinukleonen-Gleichungen beschrieben wird. In den beiden folgenden Abschnitten werden die Integrationsverfahren zur Berechnung von $v_{2N}(\rho, q)$, $S_{2N}(\rho, q)$ und $D_{2N}(\rho, q)$ vorgestellt. Damit hat man die Voraussetzungen geschaffen, die zur Berechnung des Born-Termes der Faddeev-Gleichungen erforderlich sind. Im wichtigsten Abschnitt dieses Kapitels wird das Verfahren zur Lösung der Faddeev-Gleichungen angegeben, wo wegen der auftretenden Singularitäten spezielle Substitutionen notwendig sind und folglich auch interpoliert werden muß. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, wie aus den homogenen Faddeev-Gleichungen die Triton-Bindungsenergie bestimmt werden kann.

7.1 Zwei-Nukleonen-Gleichungen

Wie in Kapitel 3 gezeigt worden ist, müssen die Formfaktoren zu dem UPA-Potential numerisch berechnet werden. Die Formfaktoren sind nach den Gleichungen (3.35) bzw. (3.37) die Eigenfunktionen zum Eigenwert $k=1$. Die Integrale wurden mittels Gauß-Legendre-Integration numerisch ausgeführt. Die Stützstellen x_i der

Gauß-Legendre-Integration sind die Nullstellen der Legendre-Polynome und liegen daher im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$. Mit der Substitution, die in dieser Arbeit an verschiedenen Stellen benutzt worden ist,

$$g(x) = \frac{\delta x + \alpha}{\beta x + \gamma} \quad (7.1)$$

wobei

$$\alpha = g^{(0)}(g^{(-)} - g^{(+)}), \quad (7.2)$$

$$\beta = g^{(-)} - 2g^{(0)} + g^{(+)}, \quad (7.3)$$

$$\gamma = g^{(-)} - g^{(+)} \quad (7.4)$$

und

$$\delta = g^{(-)}(g^{(+)} - g^{(0)}) - g^{(+)}(g^{(0)} - g^{(-)}) \quad (7.5)$$

ist, werden die Stützstellen $x_i \in \langle -1, 1 \rangle$ in das Intervall $\langle g^{(-)}, g^{(+)} \rangle$ transformiert; dabei wird $x_i = 0$ nach $g^{(0)} = g^{(0)}$ abgebildet. Die Gaußgewichte W_i werden mit der Ableitung

$$g'(x) = \frac{\delta x - \alpha \beta}{(\beta x + \gamma)^2} \quad (7.6)$$

zu $\tilde{W}_i = g'(x_i) W_i$ transformiert, so daß gilt:

$$\int_{g^{(-)}}^{g^{(+)}} f(g) dg \approx \sum_i f(g(x_i)) \tilde{W}_i \quad (7.7)$$

Falls $g^{(0)} = \frac{1}{2} (g^{(+)} + g^{(-)})$ gilt, ist g eine lineare Transformation.

Die Integrale $\int_0^\infty$ in (3.35) bzw. (3.37) werden auf den endlichen Bereich $\int_0^{p_{\max}}$ reduziert. Es wurde gewählt:

$g^{(-)} = 0$, $g^{(0)} = 5 \text{ fm}^{-1}$ und $g^{(+)} = p_{\max} = 200 \text{ fm}^{-1}$; die Zahl der Stützstellen

betrug 64. Das Eigenwertproblem wurde mit Unterprogrammen der

NAG-Bibliothek gelöst. Der Eigenwert $k=1$ wurde durch "regula falsi"

bestimmt, indem zu $(1-k)$ die Nullstelle gesucht wurde. Mit der Normierung (3.8) ergeben sich aus den gefundenen Eigenfunktionen die Formfaktoren $\chi_s(p)$; diese wurden zusammen mit den Gauß-Stützstellen zu p und Gaußgewichten abgespeichert. Da $\chi_s(p)$ für beliebige Impulse gebraucht wird, muß interpoliert werden. Deshalb wurde mit Hilfe der Integralgleichungen (3.35) bzw. (3.37) $\chi_s(p)$ für ein dichteres Gitter von p -Punkten bestimmt. Dabei wurden 301 äquidistante Werte x_i zwischen -1 und 1 gewählt und daraus mit der Transformation (7.1) die Stützstellen $p_i = g(x_i)$ bestimmt; die Parameter dieser Transformation sind: $g^{(0)} = 0$, $g^{(0)} = 10 fm^{-1}$ und $g^{(1)} = 100 fm^{-1}$. Wie noch zu zeigen ist, werden die Formfaktoren auch bei positiv-imaginären Argumenten benötigt. Dafür wurden an 30 äquidistanten Werten zwischen 0 und $i \cdot 1 fm^{-1}$ auf der imaginären p -Achse die Formfaktoren berechnet und ebenfalls zusammen mit den Quadraten der Stützstellen (also negativen Werten für p^2) abgespeichert. Die Interpolationen für die positiv-reellen bzw. positiv-imaginären Impulse wurde mit dem Spline-Verfahren durchgeführt.

Die Streuphasen wurden gemäß (3.17) aus der on-shell-T-Matrix für das Zwei-Nukleonen-System bestimmt. Diese on-shell-T-Matrix kann, auf verschiedene Weisen berechnet werden:

- a) Man löst die Lippmann-Schwinger-Gleichung iterativ und summiert die Neumann-Reihe mit Padé-Approximation auf [Chr 63, Bak 70]. Dies wurde beim separablen Yamaguchi- und UPA-MT-Potential und beim lokalen MT-Potential durchgeführt.
- b) Bei den separablen Potentialen kann die separable Form der T-Matrix angewandt werden, die beim Yamaguchi-Potential auf einen analytischen Ausdruck führt, beim UPA-MT-Potential muß

das Integral in (3.10) numerisch mit den abgespeicherten Gaußpunkten, -gewichten und den zugehörigen Formfaktoren ausgeführt werden. Dabei muß der Pol im Integranden von (3.10) beachtet werden, der für $z > 0$ auftritt. Dieser Pol ist jedoch integrierbar.

Die so gefundenen Werte wurden mit denen gemäß a) berechneten verglichen. Dies ist ein guter Test für die Genauigkeit der Interpolation und Integration der Formfaktoren, die sich ergebenden Abweichungen sind kleiner als 10^{-6} .

Mit den Streuphasen, die sich nach (3.17) aus den on-shell-T-Matrixelementen ergeben, wurden durch Anpassung an Polynome gemäß (3.18) die Streulängen und Reichweiten berechnet, die in den Tabellen 3.1 bis 3.3 aufgelistet sind.

7.2 Berechnung des Dreinukleonenpotentials

Da die Berechnung der Partialwellenanteile $\mathcal{V}_{\ell'N\ell\lambda\ell}(p',q',pq)$ des Dreinukleonenpotentials den weitaus größten Anteil an Computerzeit erfordert, muß hier sorgfältig geplant werden, wie man dennoch eine ausreichende Genauigkeit bekommt. Um die Symmetriebeziehung (4.54) ausnutzen zu können, ist es sinnvoll in p und p' bzw. q und q' dieselbe Diskretisierung vorzunehmen. Es sollen N_p Stützstellen für die p -Impulse mit $0 = p_1 \leq p_i \leq p_{N_p}$ und N_q Stützstellen für die q -Impulse mit $0 = q_1 \leq q_i \leq q_{N_q}$ gewählt werden; wie die Stützstellen festgelegt werden, soll weiter unten beschrieben werden.

Auch bei der Auswahl der Drehimpulse muß man sich einschränken. Es sei $N_w(L)$ die Anzahl der Drehimpulspaare $(\lambda_{i_w}, \lambda_{i_w})$, mit

$1 \leq l_w \leq N_w$, die zum Gesamtdrehimpuls L koppeln. Die drei Drehimpulse (l_w, λ_{l_w}, L) müssen der Dreiecksungleichung genügen. Da die Operatoren $\mathcal{V}_\psi$, C und D , die in (4.15), (5.39) und (5.40) definiert sind, die Paritäten zum Subsystem und dritten Teilchen erhalten, brauchen nur solche Partialwellen zu $\mathcal{V}_{\lambda l \lambda L}$ mitgenommen zu werden, für die (4.53) gilt. Da darüber hinaus das Zweinukleonenpotential nur in s -Wellen wirkt, folgt $(-1)^{2l} = (-1)^L = 1$, d.h. nur gerade Drehimpulse l^1 und l tragen bei. Die Festlegung von $N_w(L)$ ist durch die Konvergenz der Summen in (5.87) und (5.88) gegeben. Somit ist $(N_w(L) \cdot N_p \cdot N_q)^2$ die Gesamtzahl der zu berechnenden Funktionswerte zu $\mathcal{V}_{\lambda l \lambda L}(p'q, pq)$, die sich wegen der Symmetriebeziehung (4.54) auf etwa die Hälfte reduzieren läßt.

Am meisten Zeit wird für die numerische χ_2 - und χ_3 -Integration verbraucht, die gemäß (4.42) für $\mathcal{V}_{l_1 l_2 l_3}(p'q, pq)$ notwendig ist. Für ein bestimmtes L und für vorgegebene Drehimpulse (l_w, λ_{l_w}) werden zuerst nach (4.47), (4.48) und (4.49) die Geometrie-koeffizienten $G_{l_w \lambda_{l_w} l_w \lambda_{l_w} L}^L$, $B_{l_w l_w}^{l_1 l_2 \lambda_1 \lambda_2}$ und $B_{\lambda_{l_w} \lambda_{l_w}}^{l_1 l_2 \lambda_1 \lambda_2}$ berechnet; dies legt die maximalen Werte für l_1, l_2 und l_3 fest: Für $L=0$ und $(l_w, \lambda_{l_w}) = (0,0), (2,2), (4,4)$ ergibt sich zum Beispiel: $0 \leq l_i \leq 8$. Da l_1 nur gerade sein kann, führt das für jede Impulskombination auf 405 Doppelintegrale; bei $N_p=19$ und $N_q=14$ sind das insgesamt etwa 14 Millionen Integrale.

Die größte Genauigkeit bei relativ kleiner Stützstellenzahl liefert die Gaußintegration; die Stützstellenzahl N_x^V wurde sowohl für die χ_2 - als auch für die χ_3 -Integration gewählt. Da Pole außerhalb des Integrationsbereiches zu großen Variationen des Integranden

im Integrationsbereich führen können, müssen die Gaußpunkte transformiert werden. Diese Transformation wird nur bei der x_2 -Integration vorgenommen. Aus (4.76) folgt, daß der Pol bei

$$x_{02} = \frac{1}{2p'p} \left(p'^2 + p^2 + \frac{1}{4} A_3^2 + \mu^2 \right) \quad (7.8)$$

liegt. Mit

$$\alpha = \frac{1}{x_{02}} \quad (7.9)$$

wird die Substitution

$$x_2 = \frac{x_2' + \alpha}{1 + \alpha x_2'} \quad (7.10)$$

definiert, die ein Spezialfall von (7.1) ist. Das Intervall $\langle -1, 1 \rangle$ wird auf sich selbst abgebildet und für $x_2' = 0$ ergibt sich $x_2 = \alpha$: Je näher der Pol bei x_{02} von rechts nach $(+1)$ heranrückt, um so dichter liegen die Stützstellen an der rechten Intervallgrenze. Falls für den Pol $x_{02} \gg 1$ gilt, folgt $\alpha \approx 0$ und (7.10) ist fast eine lineare Transformation. Im Gegensatz zu [Glö82, Böm 83], wo dieselbe Substitution benutzt wird, aber α fest vorgegeben ist, hängt hier α von der Lage des Poles ab. Dadurch erhält man bessere Ergebnisse für die Fälle, bei denen der Pol keine Rolle spielt. In Tabelle 7.1 sind für verschiedene Werte von p , p' und A_3 die Lage des Poles x_{02} und der Substitutionsparameter α angegeben.

Bei der Integration muß $N_x^V = 12$ gewählt werden, damit die Integrale $v_{l_1 l_2 l_3}(p', q', p, q)$ im allgemeinen in den ersten drei Stellen genau sind. Es gibt jedoch Fälle (zum Beispiel für $p \approx p' \approx$

$p' \text{ fm}$	$p \text{ fm}$	$A_3 \text{ fm}$	x_{02}	α
1	1	1	1,375	0,727
1	1	8	9,250	0,108
1	6	1	3,146	0,318
1	6	8	4,458	0,224
1	12	1	6,073	0,165
1	12	8	6,729	0,149
6	6	1	1,010	0,990
6	6	8	1,229	0,814
6	12	1	1,255	0,797
6	12	8	1,365	0,733
12	12	1	1,003	0,997
12	12	8	1,057	0,946

Tabelle 7.1: Lage der Pole bei der x_2 -Integration

$\approx 10 \text{ fm}^{-4}$ und große Werte für ℓ_4), wo die Genauigkeit geringer ist, und die Fehler etwa 10% betragen können. Allerdings tragen diese Fälle im Endergebnis von $v_{N\ell\lambda\ell}(p,q;p,q)$, nachdem also über eine Vielzahl von Integralen $v_{\ell_1\ell_2\ell_3}(p',q;p,q)$ summiert worden ist, nur wenig bei. Wichtig ist es, daß allein die $v_{\ell_1\ell_2\ell_3}(p',q;p,q)$ genau berechnet werden, die absolut sehr groß sind und daher in der Summe am meisten beitragen.. Testrechnungen für die Tritonbindungsenergie E_{Trit} ergaben, daß mit $N_x^V = 12$ die ersten drei Stellen von E_{Trit} stabil sind.

7.3 Berechnung der permutierten Anteile des Dreinukleonenpotentials.

Nachdem man die Partialwellen des Dreinukleonenpotentials berechnet und abgespeichert hat, muß man als zweiten numerischen Schritt für die Vorbereitung der Faddeev-Gleichungen die in (5.87) und (5.88) definierten Funktionen $C_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ und $D_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ bestimmen.

Auch hier wird die x - bzw. x' -Integration mit dem Gauß-Legendre-Verfahren mit N_x^{CD} Stützstellen durchgeführt; da keine Pole auftreten, braucht nicht substituiert werden. Die Werte des Dreinukleonenpotentials an den von den Integrationsvariablen abhängigen Impulsen p_b', q_b', p_b und q_b müssen durch Interpolation bestimmt werden.

Aus $x \in (-1, 1)$ folgt: $|\frac{1}{2}p - \frac{2}{3}q| < p_b < \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q$ und $|p - \frac{1}{2}q| < q_b < p + \frac{1}{2}q$.

Es sei $\bar{N}_q = N_q - 1$; wenn $q_{N_q} = \frac{2}{3}p_{N_p}$ gilt, folgt für alle $p \leq p_{N_p}$ und $q \leq q_{N_q}$:

$p_0 \leq p_{N_p}$ und $q_0 \leq \frac{4}{3}p_{N_p} = 2q_{N_q}$. Für eine vorgegebene maximale Stützstelle

p_{N_p} definiere ich daher: $q_{N_q} = q_{N_q-1} = \frac{2}{3}p_{N_p}$ und $q_{N_q} = 2q_{N_q} = \frac{4}{3}p_{N_p}$; dann braucht nicht extrapoliert zu werden, wenn $C_{2N \otimes L}$ und $D_{2N \otimes L}$ nur für $q' \leq q_{N_q}$

und $q \leq q_{N_q}$ berechnet wird. Die restlichen q -Stützstellen seien durch

$q_i = \left(\frac{i-1}{N_q-1} \right)^2$ gegeben; die Stützstellen liegen daher bei kleinen q -

Werten dichter als bei größeren. Die Interpolationen werden mit dem

kubischen Spline-Verfahren [Glö 82a] durchgeführt: Dabei wird der

interpolierte Funktionswert als Linearkombination der vorgegebenen

Funktionswerte an den Stützstellen geschrieben:

$$f_1(p_b) \approx \sum_{i=1}^{N_p} S_i^{(p)}(p_b) f_1(p_i) \quad (7.11)$$

und

$$f_2(q_b) \approx \sum_{j=1}^{N_q} S_j^{(q)}(q_b) f_2(q_j). \quad (7.12)$$

Die Koeffizienten $S_i^{(p)}(p_b)$ und $S_j^{(q)}(q_b)$ sind die sogenannten Spline-

Funktionen. Da die x -Abhängigkeit, die implizit in p_b und q_b

steckt, nicht mehr im Dreinukleonenpotential, sondern in den Spline-

Funktionen auftritt, kann also zuerst die x -Integration ausgeführt

werden. Mit

$$H_{2N \otimes L}(p; q_b', p, q) = \frac{1}{2} \left[(-1)^{2N} + 1 \right] \int_{-1}^1 S_i^{(p)}(p_b) S_j^{(q)}(q_b) \frac{P_{0L} 2^{2N} L(p, q, x)}{p_b^{2N} q_b^{2N}} dx \quad (7.13)$$

ergibt sich:

$$C_{2N \otimes L}(p', q', p, q) \approx v_{2N \otimes L}(p', q', p, q) + \sum_{p' \in \Lambda} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_q} v_{2N \otimes L}(p', q', p_i, q_j) H_{2N \otimes L}(p_i, q_j, p, q). \quad (7.14)$$

Ähnlich geht man bei der Berechnung von $D_{01011}(p',q',p,q)$ vor. So wird sehr viel an Rechenzeit und Kernspeicher eingespart. Als Stützstellenanzahl stellte sich $N_x^{CD} = 12$ als ausreichend heraus. Mit $N_x^{CD} = 24$ ergeben sich Werte für E_{Trit} , die erst in der fünften Stelle von denen mit $N_x^{CD} = 12$ abweichen.

Ein Problem bringen die Impulspotenzen $p_b^{l''} q_b^{l''}$ im Nenner des Integranden von (7.13): Für $\frac{1}{2}p = \frac{3}{4}q$ und $x = -1$ gilt $p_b = 0$ und für $p = \frac{1}{2}q$ und $x=1$ gilt $q_b = 0$. Obwohl für die Gaußpunkte $-1 < x_i < 1$ gilt (bei $N_x^{CD} = 12$ ist zum Beispiel: $|x_i| \leq 0,98456$), und obwohl die Impulse so diskretisiert sind, daß weder $\frac{1}{2}p = \frac{3}{4}q$ noch $p = \frac{1}{2}q$ möglich ist, können die Werte für p_b und q_b doch sehr klein werden. Auch wenn $\tilde{v}_{l''l''}(\rho',q',p,q)$ nach (4.80) regulär ist, ergeben sich für kleine Werte von p_b und q_b große Fehler, weil $v_{l''l''}(\rho',q',p,q)$ im Zähler wegen der kubischen Interpolation zum Teil mit großen Fehlern, die Potenzen $p_b^{l''} q_b^{l''}$ im Nenner aber exakt bestimmt sind; besonders groß sind die Fehler für große Drehimpulse (also zum Beispiel $l''=l'=4$). Allerdings zeigte sich, daß trotz Variation der Stützstellen p_i , q_i und x_i die Endergebnisse auf wenige Prozente stabil sind. Dies liegt wiederum daran, daß diese Fehler zwar in $S_{2N_{bLL}}(\rho',q',p,q)$ und $D_{01011}(\rho',q',p,q)$ zum Beispiel für kleine p und q groß sind; da aber diese Funktionen in Integralen zusammen mit p^2 und q^2 auftreten, werden also die Bereiche mit großen Fehlern unterdrückt, so daß es sich in den Endergebnissen (Tritonenergie, Amplituden) nicht so stark auswirkt.

Durch Testrechnungen muß festgestellt werden, welche Drehimpuls-paare (l'',l') in der Summe in (7.14) mitgenommen werden müssen. Um eine ausreichende Stabilität der Endergebnisse zu erhalten, muß für die verschiedenen Gesamtdrehimpulse L über die in Tabelle 7.2

aufgeführten Drehimpulse summiert werden, daher muß also auch $u_{eN\ell\lambda L}$ für die entsprechenden Drehimpulse berechnet werden. Es gibt zwar Impulsargumente, wo bei $C_{N\ell\lambda L}$ und $D_{N\ell\lambda L}$ die höheren Partialwellen sicherlich noch Beiträge von etwa 15% liefern können, doch tragen diese Bereiche in den Endergebnissen nicht so sehr bei. Auf die Konvergenz zu $L=0$ werde ich bei der Diskussion der Ergebnisse zur Tritonbindungsenergie noch einmal zurückkommen.

L	ℓ	λ
0	0	0
0	2	2
0	4	4
1	0	1
1	2	1
1	2	3
1	4	3
2	0	2
2	2	0
2	2	2
2	4	2

Tabelle 7.2: Drehimpulse der Partialwellen für
das Dreinukleonenpotential

7.4 Berechnung der Anteile zum Born-Term

Inhomogenität und Integralterm der Faddeev-Gleichungen (5.54) enthalten die Funktionen $Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$ und $Z_{s's}^{(3)LS}(q',q)$, die durch Integrationen bestimmt werden müssen. Ähnlich wie $Z_{s's}^{(2)LS}(q',q)$ wird auch $Z_{\ell'\lambda's',s}^{(03)LS}(p'q',q)$ berechnet.

Die Winkelintegration gemäß (5.66) wird zweckmäßigerweise mit Gauß-Legendre durchgeführt, die Stützstellenzahl sei N_x^Z . Wie der Pol im Integranden zu behandeln ist, ist durch (5.71) gegeben. Da

auch außerhalb des schraffierten Bereiches von Abbildung 5.1 der Pol, auch wenn er nicht im Integrationsbereich liegt, sich durch große Variation im Integranden bemerkbar macht, soll er für ein größeres Gebiet herausgezogen werden, das durch

$$\left| \frac{y^2 - q'^2 - q^2}{qq'} \right| < \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{L-1}} \quad (7.15)$$

gegeben ist. So kann das erste Integral

von (5.71), das den stark veränderlichen Integranden enthält, nach (5.72) analytisch angegeben werden, wobei zu beachten ist, daß der Imaginärteil $-\frac{i\pi}{q'q}$ nicht für $\left| \frac{y^2 - q'^2 - q^2}{qq'} \right| < 1$ auftritt; das zweite Integral von (5.72) hat einen schwach veränderlichen Integranden und kann daher numerisch gut bearbeitet werden. Da zu dem durch (7.15) gegebenen Gebiet auch Impulse q' bzw. q gehören, die oberhalb von $q_{\max} = \sqrt{\frac{4}{3}} \gamma$ liegen, können die Impulse $p_0 = \sqrt{y^2 - \frac{3}{4} q^2}$ bzw. $p'_0 = \sqrt{y^2 - \frac{3}{4} q'^2}$ rein imaginär werden. Dies ist der Grund dafür, weshalb, wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels beschrieben worden ist, die Formfaktoren auch bei imaginären Argumenten berechnet worden sind. Die Formfaktoren zum UPA-Potential müssen auch hier durch Spline-Interpolation bestimmt werden.

Damit die Amplituden $E_{s'}^{LS}$ auf mindestens drei Stellen genau sind, muß mit der Stützstellenzahl $N_s^Z = 12$ gerechnet werden. Wenn statt der Spline-Interpolation für die UPA-Formfaktoren linear interpoliert wird, bleiben die ersten drei Stellen von $E_{s'}^{LS}$ erhalten. Das heißt, daß sowohl Interpolation als auch Integration mit hinreichender Genauigkeit numerisch angenähert werden.

Bei der Berechnung von $Z_{\ell' \ell' s' s}^{(as)LS}$ und $Z_{s' s}^{(3)LS}$ müssen nach (5.92) und (5.98) Integrale über die Subsystemimpulse ausgeführt werden. Daher ist es sinnvoll, p' und p durch Integrationsstützstellen zu diskretisieren;

dies ist so vorgenommen worden: Es sei $\gamma < \bar{p}_1 < \bar{p}_2 < \bar{p}_3$,
 Damit bei der Berechnung von $C_{2'N'0LL}$, D_{0L0LL} , $Z_{s's}^{(1)LS}$ und $Z_{2'N's'1s}^{(03)LS}$
 für p_{00} nicht extrapoliert werden muß, sei $p_1=0$. Zu den N_p^I Gauß-
 punkten $x_i \in (-1,1)$ ergeben sich die N_p^I Stützstellen p_{i+1} nach (7.1)
 durch die lineare Transformation, die durch $g^{(-)}=0$, $g^{(0)}=\frac{1}{2}\bar{p}_1$ und $g^{(+)}=\bar{p}_1$
 gegeben ist, als $p_{i+1}=g(x_i)$; ebenso folgen aus den N_p^A Gaußpunkten
 $x_j \in (-1,1)$ die N_p^A Stützstellen $p_{1+N_p^I+j} = g(x_j)$ mit $g^{(-)}=\bar{p}_1$, $g^{(0)}=\bar{p}_2$
 und $g^{(+)}=\bar{p}_3$; die Gesamtzahl der Stützstellen ist also $N_p = 1 + N_p^I + N_p^A$.
 Wie schon beschrieben, legt die größte p-Stützstelle p_{N_p} die q-Stütz-
 stellen fest. Damit der Pol bei p_0' bzw. p_0 , wobei $p_0' < \gamma$ und $p_0 < \gamma$
 gilt, immer im Intervall $\langle 0, \bar{p}_1 \rangle$ liegt, muß $\bar{p}_1$ so gewählt werden,
 daß für alle Einschußenergien E_{lab} , bei denen gerechnet werden soll,
 $\bar{p}_1 > \gamma$ ist. Der Parameter $\bar{p}_2$ muß so groß gewählt werden, daß einer-
 seits bei vorgegebenen N_p die Stützstellen für die Interpolationen $\bar{p}_2$
 noch dicht genug liegen, andererseits aber das Integral $\int_0^\infty$ durch $\int_0^{\bar{p}_2}$
 schon gut approximiert wird.

Da die Argumente q' und q von $Z_{s's}^{(1)LS}(q',q)$ durch die Stützstellen der
 Faddeev-Gleichungen gegeben sind, müssen die zugehörigen Funktions-
 werte sowohl in q' als auch in q durch Spline-Interpolation bestimmt
 werden. Falls Pole, die mit Hilfe von (5.97) behandelt werden, auf-
 treten, muß zusätzlich noch bezüglich der Polstellen p_0' bzw. p_0
 interpoliert werden. Ähnliches gilt für $Z_{2'N's'1s}^{(03)LS}(p',q',q)$. Hier muß
 immer für die Endkanalimpulse p' und q' , die durch die on-shell-
 Beziehung $\gamma^2 = p'^2 + \frac{3}{4}q'^2$ miteinander verknüpft sind, in $C_{2'N'0LL}$ inter-
 poliert werden; es werden also nur die Funktionswerte von $C_{2'N'0LL}$
 benötigt, für deren Argumente $p' \leq \gamma$ und $q' \leq q_{max}$ gilt. Die numerischen
 Parameter, die das Dreinukleonenpotential festlegen, sind außer

den schon in den vorhergehenden Abschnitten eingeführten Stützstellenzahlen N_x^V und N_x^{CD} die Folgenden: $N_p^T, N_p^A, N_q, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ und $\bar{p}_3$. Testrechnungen zeigen, daß mit $\bar{p}_1 = 1 \text{ fm}^{-1}$, $\bar{p}_2 = 2,5 \text{ fm}^{-1}$ und $\bar{p}_3 = 12 \text{ fm}^{-1}$ woraus sich abhängig von N_p^A als größter q-Wert für das Dreinukleonenpotential, der in die Faddeev-Gleichungen eingeht, die Größe $q_{N_A} \approx 7,5 \text{ fm}^{-1}$ ergibt. Stabile Ergebnisse für die p- und p'-Integration und für die Interpolationen beim Dreinukleonenpotential erfordern folgende Stützstellenzahlen: $N_p^T = N_p^A = 9$ (also $N_p = 19$) und $N_q = 14$. Damit sind die numerischen Parameter für das Dreinukleonenpotential festgelegt. Die aus dem Dreinukleonenpotential berechneten Funktionen $Z_{s's}^{(1)LS}$ und $Z_{\lambda\lambda's's}^{(a3)LS}(p,q)$ haben stellenweise einen numerischen Fehler von bis zu 5%. Verschiedene Rechnungen zeigen, daß mit den oben aufgeführten Parametern der Fehler bei der Tritonenergie etwa 0,2% und bei den Amplituden $T_{\lambda\lambda's's}^{(1)LS}$ etwa 2% beträgt: Dies ist sicherlich ausreichend, da das Dreinukleonenpotential, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, einen Effekt von höchstens 10% bewirkt.

Weiter unten ist noch zu zeigen, welche und wieviele Drehimpuls-paare (l'', λ'') in den Summen in den Gleichungen für $C_{\lambda'\lambda''0LL}$ (5.87) und für D_{000LL} (5.88) mitzunehmen sind: Diese Konvergenzbetrachtung wird bei der Diskussion der Ergebnisse für die Tritonbindungsenergie und für die Amplituden gemacht.

7.5 Numerische Verfahren zur Lösung der Faddeev-Gleichungen

In diesem Kapitel sind bis jetzt die numerischen Verfahren zur Berechnung von Inhomogenität und Integralkern der Faddeev-Gleichungen aufgeführt worden, so daß nun mit diesen Gleichungen selbst begonnen werden kann. Es muß die Diskretisierung der kontinuierlichen Impulse

unter Berücksichtigung der Singularitäten vorgenommen werden; dabei sind Interpolationen notwendig. Damit hat man ein algebraisches Gleichungssystem erhalten, das gelöst werden muß.

Ich beginne mit der Diskretisierung der q' -Impulse der Faddeev-Gleichungen (5.54). Es werden drei Intervalle definiert: $\langle 0, q_{\max} \rangle$, $\langle q_{\max}, q_t \rangle$ und $\langle q_t, 30q_t \rangle$; dabei ist

$$q_t = \sqrt{4x_0^2 + q_0^2},$$

und es gilt $q_{\max} < q_0 < q_t$, das heißt, der Pol der T-Matrix liegt immer im Intervall $\langle q_{\max}, q_t \rangle$. Unterhalb der Aufbruchschwelle (für $y^2 < 0$) ist $q_{\max}$ nicht definiert; ich setze daher in diesem Falle $q_{\max} = 0$, und das erste der drei Intervalle entfällt. Im Intervall $\langle 0, q_{\max} \rangle$ werden N'_1 nahezu äquidistante Punkte q'_i gewählt mit $q'_1 = 0$ und $q'_{N'_1} = q_{\max}$; mit $\Delta q' = \frac{q_{\max}}{N'_1 - 2}$ werden die weiteren gewählt: $q'_2 = 3\Delta q'$, $q'_3 = 4\Delta q'$ usw. bis $q'_{N'_1-3} = (N'_1-3)\Delta q'$ und $q'_{N'_1-2} = q_{\max} - \frac{1}{2}\Delta q'$ und $q'_{N'_1-1} = q_{\max} - \frac{1}{4}\Delta q'$. Dabei ist noch als weitere Stützstelle $q_{iy} = y$ so einzufügen, daß die q_i aufsteigend angeordnet sind.

Da die elastische Amplitude bei kleinen Impulsen nur schwach veränderlich bei $q_{\max}$ wegen der Wurzelsingularität aber stark veränderlich ist, ist diese Stützstellenverteilung sinnvoll.

Für die beiden weiteren Intervalle werden Gaußstützstellen genommen.

Zu den N'_2 Gaußpunkten $x_i \in \langle -1, 1 \rangle$ werden durch

$$q'_{N'_1+i} = q_{\max} + \frac{1}{4}(q_t - q_{\max})(1 + x_i)^2 \quad (7.16)$$

Stützstellen in $\langle q_{\max}, q_t \rangle$ definiert, und zu den N'_3 Gaußpunkten $x_k \in \langle -1, 1 \rangle$ werden mit der Transformation (7.1) und mit $q^{(-)} = q_t$, $q^{(0)} = 2q_t$ und $q^{(+)} = 30q_t$ die Stützstellen $q'_{N'_1+N'_2+k}$ im Intervall $\langle q_t, 30q_t \rangle$ gewählt. Als weitere Stützstelle wird q_0 für die Behandlung des Poles von $\tau_1(z - \frac{1}{m} \frac{3}{4} q^2)$ gebraucht, so daß man für q'

insgesamt $N' = N'_1 + N'_2 + N'_3 + 1$ Stützstellen hat.

Die q_i mit $i > N'_1$ sind zugleich die Stützstellen für die Integration

$\int_{q_{\max}}^{30q_t} dq''$; der Wert $30q_t$ ist so abgeschätzt, daß bei $q'' > 30q_t$ der Integrand so stark abgefallen ist, daß er zum Integral kaum noch beiträgt. Es sei also $q''_{N'_1 + j} = q'_{N'_1 + j}$, dabei ist N''_1 die von den q'_i abhängige Zahl der Integrationsstützstellen für das Integral $\int_0^{q_{\max}} dq''$. Bei diesen N''_1 Stützstellen müssen die logarithmischen Singularitäten berücksichtigt werden: Durch geeignete Substitutionen wird der Integrand endlich gemacht. Die Lage der beiden Singularitäten (vergleiche Abbildung 5.1) ist durch

$q_{01} = \frac{1}{2} q'_1 + p'_1$ für $q'_1 \in \langle 0, q_{\max} \rangle$ und durch $q_{01} = -\frac{1}{2} q'_1 + p'_1$ für $q'_1 \in \langle 0, \gamma \rangle$ und durch $q_{01} = \frac{1}{2} q'_1 - p'_1$ für $q'_1 \in \langle \gamma, q_{\max} \rangle$ mit $p'_1 = \sqrt{\gamma^2 + \frac{3}{4} q'^2_1}$ gegeben. Mit Ausnahme der Spezialfälle $q'_1 = 0$, $q'_1 = \frac{1}{2} q_{\max}$, $q'_1 = \gamma$ und $q'_1 = q_{\max}$ gilt: $0 < q_{01} < q_{02} < q_{\max}$; das Integral $\int_0^{q_{\max}}$ muß also in $\int_0^{q_{01}} + \int_{q_{01}}^{q_{02}} + \int_{q_{02}}^{q_{\max}}$ zerlegt werden. Es seien $x^{(n)}_{j_1}$ die $N^{(n)}_1$ Gaußpunkte zu $\langle -1, 1 \rangle$ mit $n=1, 2, 3$; es führen die folgenden Substitutionen zu endlichen Integralen:

$$q_{j_1}'' = q_{01} \left[1 - \frac{1}{4} (1 + x^{(1)}_{j_1})^2 \right] \in \langle 0, q_{01} \rangle, \quad (7.17)$$

$$q_{N^{(1)}_1 + j_2}'' = \frac{1}{2} (q_{01} + q_{02}) + \frac{1}{4} (q_{02} - q_{01}) x^{(2)}_{j_2} (3 - x^{(2)}_{j_2}) \in \langle q_{01}, q_{02} \rangle \quad (7.18)$$

und

$$q_{N^{(1)}_1 + N^{(2)}_1 + j_3}'' = \frac{1}{2} (q_{02} + q_{\max}) + \frac{1}{4} (q_{\max} - q_{02}) x^{(3)}_{j_3} (3 - x^{(3)}_{j_3}) \in \langle q_{02}, q_{\max} \rangle. \quad (7.19)$$

Es gilt also: $N''_1 = N^{(1)}_1 + N^{(2)}_1 + N^{(3)}_1$. Durch die Substitutionen geht der singuläre Term in (5.72) in die Form $(1+x) \ln(1+x)$ über, die für $x \rightarrow \mp 1$ endlich ist. Gleichzeitig wird durch (7.19) die Wurzelsingularität durch die verstärkte Häufung von Stützstellen bei $q_{\max}$ entschärft.

Für $q_i' = \frac{1}{2} q_{\max}$ wird wegen $q_{01} = \frac{1}{2} q_{\max}$ und $q_{02} = q_{\max}$ in $\langle 0, \frac{1}{2} q_{\max} \rangle$ nach (7.17) und in $\langle \frac{1}{2} q_{\max}, q_{\max} \rangle$ nach (7.18) substituiert; in derselben Weise wird mit $q_i' = q_{\max}$ verfahren, da hier $q_{01} = q_{02} = \frac{1}{2} q_{\max}$ gilt.

Für $q_i' = \gamma$ hat man $q_{01} = 0$ und $q_{02} = \gamma$ und in $\langle 0, \gamma \rangle$ wird nach (7.18) und in $\langle \gamma, q_{\max} \rangle$ nach (7.19) substituiert. Für $q_i' = 0$ kann der Pol bei $q'' = \gamma$ nach (5.77) integriert werden. Die Stützstellen für $q_i' = 0$ wurden für die $\frac{1}{2} N''$ Gaußpunkte $x_i \in \langle -1, 1 \rangle$ durch

$$q_i'' = \frac{1}{4} q_{\max} (1 + x_i) \in \langle 0, \frac{1}{2} q_{\max} \rangle \quad (7.20)$$

und

$$q_{\frac{1}{2} N'' + i}'' = q_{\max} \sqrt{1 - \frac{2}{16} (1 + x_i)^2} \in \langle \frac{1}{2} q_{\max}, q_{\max} \rangle \quad (7.21)$$

festgelegt. Dabei wird mit der Substitution (7.21) die Wurzelsingularität bei $q'' = q_{\max}$ berücksichtigt. In gleicher Weise werden auch die q'' -Stützstellen für $q_i' > q_{\max}$ festgelegt; daher ist die Gesamtzahl N_i'' der Stützstellen zu q'' für q_i' und $q_i' > q_{\max}$ immer durch $N_i'' = N''$ gegeben.

Da für $q' = q_{\max}$, wie aus Abbildung 5.1 sichtbar wird, auf einem großen Stück dicht an der logarithmischen Singularität entlang integriert wird, soll dies speziell behandelt werden. Das Integral hat die Struktur $\int_0^{q_{\max}} F(q'') \ln \left| \frac{q'' - \frac{1}{2} q_{\max}}{q'' + \frac{1}{2} q_{\max}} \right| dq''$. Durch Herausziehen der Singularität kann der stark veränderliche Teil, der vom Logarithmus herrührt, analytisch integriert werden:

$$\begin{aligned} \int_0^{q_{\max}} F(q'') \ln \left| \frac{q'' - \frac{1}{2} q_{\max}}{q'' + \frac{1}{2} q_{\max}} \right| dq'' &= F\left(\frac{1}{2} q_{\max}\right) \int_0^{q_{\max}} \ln \left| \frac{q'' - \frac{1}{2} q_{\max}}{q'' + \frac{1}{2} q_{\max}} \right| dq'' \\ &\quad + \int_0^{q_{\max}} \ln \left| \frac{q'' - \frac{1}{2} q_{\max}}{q'' + \frac{1}{2} q_{\max}} \right| (F(q'') - F(\frac{1}{2} q_{\max})) dq'' \\ &= -\frac{3}{2} q_{\max} F\left(\frac{1}{2} q_{\max}\right) \ln 3 + \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{q'' - \frac{1}{2} q_{\max}}{q'' + \frac{1}{2} q_{\max}} \right| (F(q'') - F(\frac{1}{2} q_{\max})) dq''. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Numerisch braucht also nur das schwach veränderliche Integral behandelt zu werden, wodurch die Ergebnisse gerade für $q^1 = q_{\max}$ verbessert werden. Dies ist wichtig, da die Amplitude $E_s^{LS}(q_{\max})$ im FSI-Peak, wo $q^1 = q_{\max}$ und $p^1 = 0$ gilt, eingeht.

Durch Testrechnungen wurden die Stützstellenzahlen folgendermaßen festgelegt. Da im Vergleich zur Berechnung des Dreinukleonenpotentials die Lösung des Gleichungssystems nur wenig Zeit braucht, konnten die Werte großzügig festgelegt werden: $N_1' = 22$, $N_2' = 24$ und $N_3' = 12$, die elastischen Amplituden wurden also an $N' = 59$ Stützstellen berechnet, für das Integral $\int_0^{q_{\max}} dq''$ wurde $N'' = 48$ genommen, für $0 < q_i^1 \leq q_{\max}$ wurden $N_i^{(1)}$, $N_i^{(2)}$ und $N_i^{(3)}$ etwa proportional zur zugehörigen Intervalllänge gewählt, so daß $N_i^{(1)} + N_i^{(2)} + N_i^{(3)} = N_i'' \approx N''$ gilt. Die Gesamtzahl der Stützstellen für das Integral $\int_0^\infty dq''$ beträgt also: $\hat{N}_i = N_i'' + N_2' + N_3'$. Mit den so gewählten Stützstellen erweisen sich die sich ergebenden Amplituden auf etwa 0,1% genau.

Das aus den Integralgleichungen gewonnene algebraische Gleichungssystem wird iterativ gelöst: Es sei $E_{s'}^{LS(0)}(q_i^1) = Z_{s'1}^{LS}(q_i^1, q_0)$; die Iteration ist durch

$$E_{s'}^{LS(n+1)}(q_i^1) = \sum_{s''} \sum_{j=1}^{\hat{N}_i} K_{s'i, s''j}^{LS} E_{s''}^{LS(n)}(q_j'') \quad (7.23)$$

mit dem Kern

$$K_{s'i, s''j}^{LS} = Z_{s's''}^{LS}(q_i^1, q_j'') \tau_{s'} \left(2 - \frac{k^2}{m^2} q_j'^2\right) q_j'^2 \tilde{W}_j \quad (7.24)$$

gegeben, wobei $\tilde{W}_j$ die transformierten Gaußgewichte sind. Da die Stützstellen $q_i^1 < q_{\max}$ nicht identisch mit den Integrationsstützstellen $q_j'' < q_{\max}$ sind, müssen die Werte von $E_{s''}^{LS(n)}(q_j'')$ für $q_j'' < q_{\max}$ durch Interpolation berechnet werden. Wegen der Wurzelsingularität bei $q^1 = q_{\max}$ ist es sinnvoll, die Amplitude nicht als Funktion von q^1

sondern als Funktion des zugehörigen Subsystemimpulses $p' = \sqrt{\gamma^2 + \frac{3}{4} q'^2}$ zu betrachten: $\tilde{E}_{s'}^{LS(n)}(p') = E_{s'}^{LS(n)}(q')$, denn diese Funktion hat bei $p'=0$ eine endliche Steigung. Mit dem Spline-Verfahren erhält man also die gesuchten interpolierten Funktionswerte:

$$E_{s''}^{LS(n)}(q_j^n) = \sum_{k=1}^{N_1} S_k(p_j^n) \tilde{E}_{s''}^{LS(n)}(p_k^n) = \sum_{k=1}^{N_1} S_k(p_j^n) E_{s''}^{LS(n)}(q_k^n). \quad (7.25)$$

Dabei sind $S_k(p_k^n)$ die Spline-Funktionen. Wie schon bei der Berechnung von C_{DOLL} und D_{DOLL} steckt die Abhängigkeit von den Integrationsimpulsen nur noch in den Spline-Funktionen. Man kann also das Integral $\int_0^{q_{\max}} dq^n$ ausführen und daher einen neuen Kern durch

$$\tilde{K}_{s'i, s''k}^{LS} = \sum_{j=1}^{N_1} K_{s'i, s''j}^{LS} S_k(p_j^n), \quad k \leq N_1 \quad (7.26)$$

und

$$\tilde{K}_{s'i, s''k}^{LS} = K_{s'i, s''(k+N_1-N_1)}^{LS}, \quad k > N_1. \quad (7.27)$$

definieren und erhält statt (7.23) als Iterationsschritt die Gleichung

$$E_{s'}^{LS(n+1)}(q_i') = \sum_{s''} \sum_{k=1}^{N_1} \tilde{K}_{s'i, s''k}^{LS} E_{s''}^{LS(n)}(q_k'). \quad (7.28)$$

Hier ist zusätzlich noch der Pol von $\tau_1(z - \frac{3}{2} q^2)$ bei q_0 berücksichtigt worden, der Summand in (7.28) zu $k=N_1$ ergibt sich aus dem ersten Term von (5.99). Auf ähnliche Weise werden der Pol von $Z_{s's''}^{(2)LS}$ bei $q'=0$ und $q''=\gamma$ und die logarithmische Singularität von $Z_{s's''}^{(2)LS}$ bei $q'=q_{\max}$ und $q''=\frac{1}{2}q_{\max}$ eingebaut, was die entsprechenden Elemente des Kernes modifiziert.

Mit (7.28) hat man eine Gleichung von angenehmer Form: links und rechts stehen als Argumente dieselben Stützstellen. Außerdem hat man einen singularitätenfreien Kern gewonnen; ein Umweg durch

die komplexe Ebene, der beim Verfahren der Konturdeformation zur Vermeidung der Singularitäten gewählt wird [Het 65, Ebe 72, Bru 27] ist also nicht notwendig; als Nachteil folgt jedoch, daß die Amplituden an den Integrationsstützstellen durch Interpolation bestimmt werden müssen. Zwar könnte man statt mit der Iteration gemäß (7.28) die aus (5.54) folgende Gleichung mit dem Kern $\tilde{K}^{LS}$ durch Inversion lösen, da aber die Matrizen zu groß sind, kann dies zu Rechenzeit- und Speicherprobleme führen. Da der Integralkern von (5.54) Hilbert-Schmidtsch ist, kann die zugehörige Neumann-Reihe, die aus den Summanden $E_{s'}^{LS(n)}(q')$ besteht, auch für $L=0$, wo sie divergent ist, mit der Padé-Approximation aufsummiert werden, und als Lösung erhält man die Funktionswerte $E_{s'}^{LS}(q')$ der elastischen Amplitude. Die Zahl der Iterationsschritte wird so gewählt, daß die Padé-Approximation in den ersten sechs Stellen stabil ist.

Für die Aufbruchamplitude muß noch das Integral in (5.57) berechnet werden. Da $\sum_{\mu' \lambda' s', s}^{(n) LS}$ keine logarithmischen Singularitäten enthält, kann in q'' , wie oben für $q_i' > q_{\max}$ beschrieben worden ist, diskretisiert werden. Die dabei notwendigen Interpolationen wurden wie in (7.25) durchgeführt.

Für Energien unterhalb der Aufbruchschwelle ($\gamma^2 < 0$) vereinfacht sich, wie schon angedeutet, das Problem. Das erste Teilintegral $\int_0^{q_{\max}} dq''$ existiert nicht, es gibt keine logarithmischen Singularitäten, und folglich sind auch keine Interpolationen notwendig.

7.6 Berechnung der Tritonbindungsenergie

völlig singularitätenfrei sind die homogenen Faddeev-Gleichungen (5.100) unterhalb der Deuteronbindungsenergie. Hier kann also sowohl in q' als auch in q'' mit Integrationsstützstellen diskretisiert werden. Zu den N_T Gaußpunkten $x_i \in (-1, 1)$ gehören gemäß (7.1) die Stützstellen $q_i = q(x_i)$ mit $q^{(-)} = 0$, $q^{(0)} = \bar{q}_1$ und $q^{(+)} = \bar{q}_2$. Wie oberhalb der elastischen Schwelle wird das Integral (5.100) iteriert. Zu Beginn der Iteration wird für $E_{s''s}^{0\frac{1}{2}}(q_i, q_i, z)$ der Born-Term $Z_{s''s}^{0\frac{1}{2}}(q_i, q_i, z)$ in (5.100) eingesetzt; es wird $s=1$ und $q=0$ gesetzt. Die Tritonbindungsenergie $z = E_{Trit}$ ist dadurch bestimmt, daß die zugehörigen Padé-Approximanden divergieren. Man findet also $z = E_{Trit}$, indem man mittels "regula falsi" die Nullstellen der inversen Padé-Approximanden bestimmt.

Die Tritonbindungsenergie läßt sich so sehr genau bestimmen. Um Stabilität in den ersten sechs Stellen zu bekommen, reicht $N_T = 12$ aus. Die q'' -Integration wird mit $\bar{q}_1 = 2 \text{ fm}^{-1}$ und $\bar{q}_2 = 18 \text{ fm}^{-1}$ hinreichend gut durchgeführt. Die Zahl der Iterationsschritte kann auf fünfzehn beschränkt werden.

8. Faddeev-Rechnungen unterhalb der Aufbruchschwelle

In diesem Kapitel werden Ergebnisse zu Faddeev-Rechnungen unterhalb der Aufbruchschwelle vorgestellt. Dabei geht es nicht um realistische Werte, da ja die benutzten Zwei- und Dreinukleonenpotentiale sehr vereinfachte Formen haben, sondern es soll nur die Tendenz aufgezeigt werden, die das Dreinukleonenpotential im gebundenen System, dem Triton, wofür schon realistische Rechnungen existieren [Tor 81, Car 81, Glö 82, Mus 82, Wir 82, Böm 83], bewirkt. Durch diesen Vergleich kann man dann auf die Güte der Aufbruchrechnungen schließen. Im ersten Abschnitt werden die Ergebnisse der Tritonbindungsenergie E_{trit} gegeben; diese Zahlen werden als Prüfstein für die Stabilität der numerischen Rechnungen genommen. Da es den ungefähr linearen Zusammenhang zwischen E_{trit} und a_2 , der n-d-Dublett-Streulänge gibt, soll im folgenden Abschnitt a_2 aus den rein elastischen Streuphasen zu kleinen Einschüßenergien berechnet werden.

8.1 Tritonbindungsenergie

Es gab mehrere Gründe, außer den Aufbruchwirkungsquerschnitten auch die Tritonbindungsenergie E_{trit} zu berechnen. Ein rein technischer ist der, daß dafür nur geringfügige Änderungen im Programm für die Faddeev-Gleichungen notwendig waren. Mit E_{trit} hat man dann genau eine Zahl, an der man die Stabilität bezüglich der numerischen Parameter für das Dreinukleonenpotential testen kann. Mit dem so gefundenen Wert kann man durch Vergleich zu realistischen Tritonrechnungen abschätzen, wie gut die in dieser Arbeit getroffenen Näherungen für Zwei- und Dreinukleonenpotential sind.

Ohne Dreinukleonenpotential ergibt sich für das in Tabelle 3.2 definierte UPA-MT-Potential der Wert $E_{\text{trit}} = 8,505$ MeV. Dies unterscheidet sich geringfügig von $E_{\text{trit}} = -8,63$ MeV, das von Bakker angegeben worden ist [Bak 73]; der Grund für diese Abweichung ist, daß hier das Singulett-UPA-Potential nicht bei $E=0$, sondern bei der Antiboundstate-Energie angepaßt worden ist. Dieser Wert zeigt, daß das UPA-MT-Potential noch zu attraktiv ist, weil sich bei realistischen Rechnungen mit den Reid-Potential $E_{\text{trit}} = -7,02$ MeV ergibt [Böm 83, Glö 82, Haj 81]. Bei Hinzunahme des Dreinukleonenpotentialen ergeben sich die in Tabelle 8.1 aufgeführten Zahlen. Dabei gibt ℓ_{max} den maximalen Drehimpuls zu ℓ'' und λ'' an,

ℓ_{max}	$E_{\text{trit}}/\text{MeV}$
0	8,601
2	8,961
4	9,034

Tabelle 8.1: Tritonbindungsenergien

der in den Summen über ℓ'' und λ'' mitgenommen wird; bei $\ell_{\text{max}} = 4$ sind dies also die Drehimpulse $(\ell'', \lambda'') = (0,0), (2,2)$ und $(4,4)$. Es zeigt sich also, daß die höheren Partialwellen in diesen Summen noch sehr wichtig sind. Das Dreinukleonenpotential sorgt also für etwa 6,2% zusätzliche Bindungsenergie. Dieser Wert hat also die Größenordnung, die man erwarten würde. Rechnungen mit realistischen Zweinukleonenpotentialen und dem vollen Dreinukleonenpotential (4.2) ergeben folgendes: Mit nur drei Partialwellen ergibt sich -1,3 MeV zusätzliche Bindung [Glö 82, Böm 83], bei fünf Partialwellen heben sich die Effekte wieder auf [Böm 83, Mus 82], jedoch zeigt sich, daß die Hinzunahme weiterer Partialwellen wieder für zusätzliche Bindungsenergie sorgt [Böm 83].

Dies deckt sich auch mit den in Tabelle 8.1 angegebenen Zahlen, wo ja Beiträge zu $\ell = \lambda = 2$ sich noch als wichtig erweisen.

Die ursprüngliche Absicht, in dieser Arbeit mit dem analytisch gegebenen Yamaguchi-Potential (vergl. Tabelle 3.1) zu rechnen, mußte aufgegeben werden, weil es in Verbindung mit dem Dreinukleonenpotential zu völlig unrealistischen Ergebnissen führt.

Das Yamaguchi-Potential allein ergibt den Wert $E_{\text{trit}} = -11,005 \text{ MeV}$, mit dem Dreinukleonenpotential zusammen, folgte der Wert $E_{\text{trit}} = -25,4 \text{ MeV}$ zu $\ell_{\text{max}} = 4$; das wäre eine zusätzliche Bindung von mehr als 100%. Der Grund für dieses physikalisch falsche Ergebnis ist der folgende: Das Yamaguchi-Potential ist rein attraktiv, weil die Formfaktoren immer positiv sind (vergl. Abbildung 3.1 und 3.2). Dies zeigt sich schon daran, daß der Wert $E_{\text{trit}} = -11,005 \text{ MeV}$ um ungefähr 30% von dem experimentellen abweicht. Kommt das Dreinukleonenpotential hinzu, verhindert das Yamaguchi-Potential nicht, daß die Nukleonen so dicht zusammen kommen, daß sie die relativ starke Attraktivität des Dreinukleonenpotentials verspüren. Beim realistischen Reid-Potential sorgt dafür der repulsive "hard-core". Das UPA-MT-Potential hat zwar keinen "hard-core", ist aber bei kleinen Abständen repulsiv (im Impulsraum bedeutet dies, daß es bei großen Impulsen negativ ist, was durch die in Abbildung 3.1 und 3.2 dargestellten Formfaktoren mit Vorzeichenwechsel erreicht wird); deshalb können die Nukleonen nur mit geringer Wahrscheinlichkeit in die Konfiguration kommen, wo die starke Attraktivität des Dreinukleonenpotentials wirksam wird [Mei 83].

Diese Diskussion zeigt somit auch die Grenzen des hier benutzten Modelles auf: Da bei Aufbruchreaktionen mit hohen Einschußenergien wegen des Fehlens des "hard-core" beim UPA-Potential die Nukleonen mit höherer Wahrscheinlichkeit dicht zusammenkommen können, wird also auch hier die Attraktivität, die eigentlich unterdrückt werden müßte, wirksam. Es kann allerdings nicht abgeschätzt werden, bis zu welchen Einschußenergien das hier benutzte Modell noch realistisch ist.

8.2 Neutron-Deuteron-Dublett-Streulänge

Die Tritonbindungsenergie ist, wie die Erfahrung gezeigt hat, mit der Dublett-Streulänge a_2 des n-d-Systemes korreliert. Der Zusammenhang ist durch die Phillips-Linie [Phi 68] (Abbildung 8.1) gegeben,

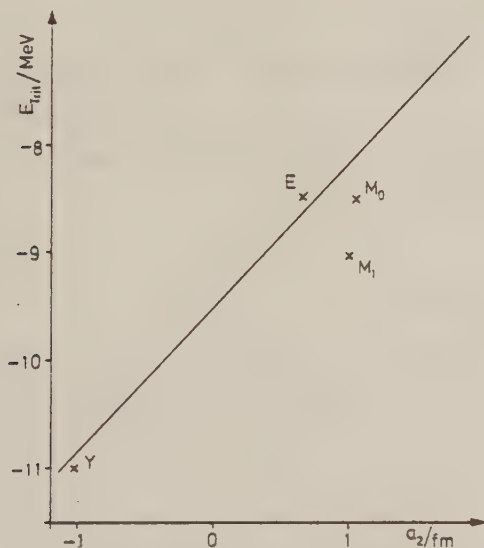


Abbildung 8.1: Phillips-Linie für Tritonbindungsenergie und n-d-Dublett-Streulänge mit dem experimentellen Punkt (E) und den theoretischen zum Yamaguchi-Potential (Y) und UPA-MT-Potential ohne (M_0) und mit (M_1) Dreinukleonenpotential

für die Harms [Har 72] die Form

$$a_2 = 0,75 \text{ fm} \cdot \left(\frac{E_{\text{trit}}}{\text{MeV}} + 8,5 \right) + 0,75 \text{ fm}$$

angibt. In der Umgebung dieser Geraden liegen sowohl die meisten theoretisch gewonnenen Werte als auch der experimentelle (Punkt E in Abbildung 8.1): $E_{\text{trit}} = -8,48 \text{ MeV}$ und $a_2 = (0,65 \pm 0,04) \text{ fm}$ [Dil 71]

Aus dem bekannten Zusammenhang zwischen der S-Matrix und den elastischen Übergangsoperatoren

$$\langle \Phi' | S_{11} | \Phi \rangle = \delta(\vec{q}' - \vec{q}_0) - 2\pi i \delta(E' - E) \langle \Phi' | T_{11} | \Phi \rangle$$

folgt für die Partialwellen

$$\begin{aligned} \langle \Phi | S_{11} | \Phi \rangle &= \frac{\delta(q' - q_0)}{q_0^2} \sum_{LM} \eta_{LS} e^{2i\delta_{LS}} Y_{LM}(\hat{q}') Y_{LM}^*(\hat{q}_0) \\ &= \frac{\delta(q' - q_0)}{q_0^2} \sum_{LM} \left[1 - \frac{16\pi^2}{3} \frac{m}{k^2} q_0 i E_1^{LS}(q_0) \right] Y_{LM}(\hat{q}') Y_{LM}^*(\hat{q}_0). \end{aligned}$$

Somit ergeben sich Streuphase δ_{LS} und Inelastizitätsparameter η_{LS} aus der Gleichung

$$E_1^{LS}(q_0) = \frac{k^2}{m} \frac{3}{16\pi^2} \frac{i}{q_0} (\eta_{LS} e^{2i\delta_{LS}} - 1).$$

Der Index L soll im Folgenden weggelassen werden, da nur der Fall $L=0$ betrachtet wird. Aus der "effective-range"-Entwicklung

$$q_0 \cot \delta_s = -\frac{1}{a_{2su}} + \frac{1}{2} r_{2su} q_0^2 + \dots$$

können durch Anpassung bei kleinen Einschubimpulsen q_0 (zum Beispiel $q_0 \approx 0,02 \text{ fm}^{-1}$) die Streulänge a_2 und die effektive Reichweite r_2 bestimmt werden. Da die on-shell-Amplitude $E_1^{LS}(q_0)$

im Dublett-System auf der negativen Energieachse Schnitte besitzt, folgt aus dem N/D-Formalismus, daß $q_0 \cot \delta_2$ bei negativen q_0^2 einen Pol besitzt [Whi 76]. Daher paßt man die Streulänge besser durch die von van Oers und Seagrave [Oer 67] angegebene Form

$$q_0 \cot \delta_2 = -A + Bq_0^2 - \frac{C}{1 + Dq_0^2}$$

an. Aus der Entwicklung von $\frac{1}{1 + Dq_0^2}$ für kleine q_0^2 erhält man:

$$a_2 = A + C,$$

$$r_2 = B + CD.$$

Ohne Dreinukleonenpotential ergab sich zu $E_{\text{trit}} = -8,505$ MeV der Wert $a_2 = 1,042$ fm (Punkt M_0 in Abbildung 8.1), und mit Dreinukleonenpotential gehört zu $E_{\text{trit}} = -9,034$ MeV der Wert $a_2 = 1,006$ fm (Punkt M_1 in Abbildung 8.1). Der Punkt M_0 liegt dicht an der Phillips-Linie. Da die Tritonbindungsenergie durch das Dreinukleonenpotential um 6,2% vergrößert, die Streulänge aber nur um 3,5% verkleinert wird, liegt der Punkt M_1 von der Linie weiter als M_0 entfernt. Die Streulänge wird zwar verkleinert, aber doch nicht stark genug, um die große Differenz zwischen dem Ergebnis realistischer Rechnungen ohne Dreinukleonenpotential (zum Beispiel $a_2 = 1,2$ fm für $E_{\text{trit}} = 7,5$ MeV mit dem "super-soft-core"-Potential von Benayoun et al. [Ben 81]) und dem experimentellen Wert erklären zu können. Doch ist noch zu hoffen, daß dies ein Effekt des unrealistischen UPA-MT-Potentiales ist. Rechnungen von Torre et al. [Tor 81], die das Dreinukleonenpotential nur störungstheoretisch mitgenommen haben, haben nämlich folgende Ergebnisse: Beim RSC- und SSC-Potential wird die Streulänge um

etwa 0,5 fm, beim lokalen MT-I-III-Potential nur um 0,1 fm verkleinert. Damit ist also noch nicht ausgeschlossen, daß eine Faddeev-Rechnung mit realistischen Zwei- und Dreinukleonenpotentialen Ergebnisse für E_{trit} und Q_1 liefern, die dicht beim experimentellen Wert liegen.

9. Ergebnisse für Aufbruchwirkungsquerschnitte

Wie die Diskussion der kinematischen Konfigurationen in Kapitel 6 gezeigt hat, kann eine ungeheure Fülle von Daten produziert werden, da ja jede kinematische Kurve durch vier Parameter festgelegt ist: die Einschußenergie E_{lab} des Neutrons und die Laborwinkel θ_1 , θ_2 und φ_{12} . Dies vervielfacht sich noch mit drei, da die Nukleonen im Endkanal permutiert werden können; experimentell ist dies durch die Art der Detektoren festgelegt, die entweder auf Protonen oder auf Neutronen ansprechen. Eine systematische Suche durch den Phasenraum, wobei für festes E_{lab} die Winkel θ_1 , θ_2 und φ_{12} mit gewissen Schrittweiten innerhalb des erlaubten Gebietes variiert wurde, führte nicht zur Aufdeckung von speziellen Strukturen. Es zeigte sich dabei, daß die Effekte des Dreinukleonenpotentialen bei großen Wirkungsquerschnitten, die durch FSI oder QFS beeinflußt sind, höchstens 5% betragen, bei Wirkungsquerschnitten, die kleiner als $0,5 \text{ mb/MeV}^2$ sind, aber auf über 10% ansteigen können. Da aber die typischen Strukturen, die bei dieser systematischen Suche gefunden worden sind, schon bei den in Kapitel 6 beschriebenen speziellen Konfigurationen auftreten, sollen nur die Ergebnisse zu diesen Konfigurationen im einzelnen diskutiert werden.

Es soll die folgende Notation eingeführt werden: Der längs der kinematischen Kurve berechnete Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{ds d\Omega_1 d\Omega_2}$ soll kurz mit $\sigma^{(1)}$ bezeichnet werden, wenn die Amplituden ohne Dreinukleonenpotential berechnet worden sind (also $Z_{s's}^{(1)LS} = 0$ und $Z_{s'l's'}^{(1)LS} = 0$); entsprechend sei $\sigma^{(2)}$ der mit Dreinukleonenpotential berechnete Wirkungsquerschnitt. Als Abweichung werde die Differenz $\Delta\sigma = \sigma^{(3)} - \sigma^{(2)}$ bezeichnet, und die relative Abweichung sei

durch $\Delta_{rel} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma^{(2)}}$ gegeben. Es sollen im Folgenden zumeist solche Konfigurationen untersucht werden, bei denen die Neutronen in den beiden Detektoren registriert werden und somit die Teilchen mit den Nummern 1 und 2 sind; das Proton, dessen Energie im Experiment im Targetszintillator gemessen werden kann, ist dann das Teilchen 3. In den Fällen, wo die Nukleonen anders numeriert sind, wird besonders darauf hingewiesen.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird untersucht, bei welchen Drehimpulsen die Partialwellenentwicklungen der Amplituden abgebrochen werden kann, so daß für die Wirkungsquerschnitte stabile Ergebnisse folgen. In den folgenden Abschnitten werden für die vier speziellen Konfigurationen, also für FSI, QFS, kollineare und Sternkonfiguration, die Ergebnisse für $\sigma^{(2)}$ und $\Delta\sigma$ vorgestellt und diskutiert; dabei soll eine Systematik bei den Abweichungen $\Delta\sigma$ herausgearbeitet werden.

9.1 Konvergenz der Partialwellenentwicklung der Amplituden

In diesem Abschnitt wird die Konvergenz der Partialwellenentwicklungen zu den Amplituden $T_{s't}^{(2)}(i)$ und $\hat{T}^{(3)}(i)$, die in (6.22) und (6.23) definiert worden sind und gemäß (6.26) zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Dabei läßt sich nach (5.61) und (5.63) $T_{s't}^{(2)}(i)$ auf die elastischen Amplituden $E_s^{Ls}(q')$ zurückführen. Es sei $L_{max}^{(2)}$ der maximale Gesamtdrehimpuls, für den die elastischen Amplituden exakt in der Summe von (5.61) mitgenommen werden sollen, und $L_{max}^{(3)}$ der maximale Gesamtdrehimpuls, für den das Dreinukleonenpotential mitgenommen werden soll. Es müssen also die elastischen Amplituden $E_s^{Ls}(q')$ für $L=0$ bis $L=L_{max}^{(2)}$ berechnet werden; dabei wurde für $L=0$ bis $L=L_{max}^{(2)}$ der Anteil

$Z_{s's}^{(3)LS}$ im Born-Term $Z_{s's}^{LS}$ mitgenommen und mit Gleichung (5.57) die Zusatzamplitude $\tilde{T}_{\lambda'\lambda}^{(3)LS}(p',q')$ bestimmt. Da für große Werte von L die Neumann-Reihe zu den Faddeev-Gleichungen sehr schnell konvergiert, soll für $L > L_{\max}^{(2)}$ die elastische Amplitude durch $E_{s'}^{LS}(q',q) \approx Z_{s's'}^{(2)LS}(q',q_0)$ angenähert werden. Die Summe in (5.61) kann also so umgeformt werden:

$$\sum_{L=0}^{\infty} E_{s'}^{LS}(q') \sum_{M=-L}^L Y_{LM}(\hat{q}') Y_{LM}^*(\hat{q}_0) = \sum_{L=0}^{L_{\max}} (E_{s'}^{LS}(q') - Z_{s's'}^{(2)LS}(q',q_0)) \sum_{M=-L}^L Y_{LM}(\hat{q}') Y_{LM}^*(\hat{q}_0) + Z_{s's'}^{(2)S}(\vec{q}', \vec{q}_0)$$

Dabei kann $Z_{s's'}^{(2)S}(\vec{q}', \vec{q}_0)$ nach (5.67) analytisch angegeben werden. Die Amplituden $\tilde{T}_{\lambda'\lambda}^{(3)LS}(p',q')$ sind für alle Drehimpulse, die in Tabelle 7.2 aufgeführt worden sind, berechnet worden. Zur Einschußenergie $E_{lab} = 14,4$ MeV, für die $q_0 = 0,55557 \text{ fm}^{-1}$ ist, sind

L	L'	λ'	$\tilde{T}_{\lambda'\lambda}^{(3)LS}(p',q')$
0	0	0	$-0.54 \cdot 10^{-2} + 0.24 \cdot 10^{-1} i$
0	2	2	$-0.16 \cdot 10^{-6} - 0.15 \cdot 10^{-6} i$
0	4	4	$-0.23 \cdot 10^{-8} + 0.29 \cdot 10^{-7} i$
1	0	1	$-0.17 \cdot 10^{-3} + 0.16 \cdot 10^{-4} i$
1	2	1	$0.30 \cdot 10^{-5} - 0.42 \cdot 10^{-5} i$
1	2	3	$0.51 \cdot 10^{-8} + 0.14 \cdot 10^{-7} i$
1	4	3	$-0.61 \cdot 10^{-8} - 0.12 \cdot 10^{-8} i$
2	0	2	$-0.79 \cdot 10^{-5} - 0.14 \cdot 10^{-5} i$
2	2	0	$-0.10 \cdot 10^{-2} - 0.19 \cdot 10^{-3} i$
2	2	2	$-0.61 \cdot 10^{-6} - 0.13 \cdot 10^{-6} i$
2	4	2	$-0.31 \cdot 10^{-6} - 0.29 \cdot 10^{-7} i$

Tabelle 9.1: Werte der Amplituden $\tilde{T}_{\lambda'\lambda}^{(3)LS}(p',q')$ für $p' = \frac{3}{4} q_{\max}$, $q' = \frac{1}{2} q_{\max}$ und $q_0 = 0,55557 \text{ fm}^{-1}$.

in Tabelle 9.1 die Amplituden $\tilde{T}_{\ell'\lambda'}^{(3)LS}(p', q')$ aufgeführt (die Impulse $p' = \frac{3}{4}q_{\max}$ und $q' = \frac{1}{2}q_{\max}$ sind on-shell); für diese Argumente lassen sich die Werte von $\tilde{T}_{\ell'\lambda'}^{(3)LS}(p', q')$ am besten vergleichen, weil ja für $q'=0$ (wo $p'=y$ ist) und $\lambda'>0$ bzw. für $p'=0$ (wo $q'=q_{\max}$ ist) und $\ell'>0$ gelten muß: $\tilde{T}_{\ell'\lambda'}^{(3)LS}(p', q') = 0$. Die Tabelle 9.1 zeigt, daß nur die in Tabelle 9.2 aufgeführten Drehimpulse in der

L	ℓ'	λ'
0	0	0
1	0	1
2	0	2
2	2	0

Tabelle 9.2: Drehimpulse, die bei $\tilde{T}_{\ell'\lambda'}^{(3)LS}$ mitgenommen werden müssen.

Summe (5.64) mitgenommen werden brauchen. Dies hat den Vorteil, daß in (5.64) die Summe über die magnetische Quantenzahl M sich auf ein Legendre-Polynom reduziert.

Daß $L_{\max}^{(2)} = 8$ und $L_{\max}^{(3)} = 8$ hinreichende Genauigkeit beim Wirkungsquerschnitt ergeben, zeigen die im Folgenden beschriebenen Testrechnungen. Es wurden dafür die Konfigurationen K_1 bis K_6 zu $E_{lab} = 14,4$ MeV ausgewählt, deren Parameter in der Tabelle 9.3

	θ_1	θ_2	φ_{12}	E_1/MeV	E_2/MeV	Konfiguration
K_1	30°	80°	180°	3,97	4,18	1-3-FSI ($E_{\lambda_2} < 1$ keV)
K_2	30°	80°	180°	8,04	2,93	-
K_3	30°	30°	180°	5,57	5,97	QFS ($E_3 = 191$ keV)
K_4	30°	30°	0°	4,01	4,01	1-2-FSI ($E_{12}=0$)
K_5	30°	30°	0°	7,62	0,78	-
K_6	51,02°	51,02°	120°	4,04	4,04	senkrechter Stern

Tabelle 9.3: Konfigurationen für den Partialwellentest

aufgeführt sind. Dabei ist K_1 eine 1-3-FSI-Konfiguration mit $E_{13} < 1 \text{ keV}$; K_2 ist eine Konfiguration auf derselben kinematischen Kurve wie K_1 , wo der Wirkungsquerschnitt ein Minimum hat; bei K_3 ist ein QFS-Peak mit $E_3 = 191 \text{ keV}$; bei K_4 liegt der 1-2-FSI-Peak mit $E_{12} = 0$; K_5 liegt auf derselben kinematischen Kurve wie K_4 ; bei K_6 bilden die Schwerpunktsimpulse den senkrechten Stern. Die Wirkungsquerschnitte für diese sechs Konfigurationen sind in den Spalten 3 bis 8 der Tabelle 9.4 aufgeführt. Die Minus-

$L_{\text{max}}^{(2)}$	$L_{\text{max}}^{(3)}$	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
0	-	5,0834	0,52849	4,2322	13,141	0,55132	0,55881
0	-	5,0852	0,52864	4,2321	13,147	0,55134	0,85879
1	0	5,1707	0,55872	4,1740	13,301	0,56479	0,89763
1	1	5,1741	0,55894	4,1746	13,312	0,56490	0,89763
1	2	5,1642	0,55898	4,1707	13,287	0,56460	0,89566

Tabelle 9.4: Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte von $L_{\text{max}}^{(2)}$ und $L_{\text{max}}^{(3)}$ für die Konfigurationen aus Tabelle 9.3.

Die Einheit der Wirkungsquerschnitte in Spalten 3 bis 8 ist $\text{mb/MeVsr}^{\frac{1}{2}}$.

Zeichen in der zweiten Spalte bedeuten, daß die Wirkungsquerschnitte der entsprechenden Zeilen ohne Dreinukleonenpotential berechnet worden sind. Aus den beiden ersten Zeilen dieser Tabelle wird deutlich, daß mit $L_{\text{max}}^{(2)} = 8$ eine sehr gute Stabilität erreicht ist: Die Unterschiede gegenüber $L_{\text{max}}^{(2)} = 7$ sind kleiner als $0,3 \text{ }^\circ/\text{oo}$. Die weiteren Zeilen zeigen die Beiträge des Dreinukleonenpotentials zum Wirkungsquerschnitt: Den größten Anteil liefert der Gesamtdrehimpuls $L=0$; die Beiträge von $L=1$ und $L=2$ stellen nur kleine Korrekturen dar. Der Fehler im Wirkungsquerschnitt, der von der Partialwellenentwicklung herrührt, ist also kleiner als $1 \text{ }^\circ/\text{oo}$. Die Abweichungen $\Delta\sigma$ sind in ungünstigen Fällen wie bei Konfiguration K_4 auf etwa 10% genau. Bei höheren Einschußenergien werden

diese Fehler nur geringfügig größer, so daß generell mit $L_{\max}^{(2)} = 8$ und $L_{\max}^{(1)} = 2$ gerechnet werden kann.

9.2 Aufbruchquerschnitt für FSI

Die exakte FSI-Konfiguration ist dadurch gekennzeichnet, daß in dem Subsystem i der Relativimpuls p_i verschwindet: $p_i = 0$; daher folgt für den Impuls des Nukleons i : $q_i = q_{\max}$. Von den Amplituden $T_{\ell' \lambda' s'}^{(1) LS}(0, q_{\max})$ tragen dann genau die bei, für die $\ell' = 0$ und $\lambda' = L$ gilt. Das sind aber genau die Partialwellen, die nach Tabelle 9.1 einen wichtigen Beitrag zur vollen Amplitude $T_{s'}^{(1) S}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{q}_0)$ liefern. Deshalb sollte am FSI-Peak ein deutlicher Effekt des Dreinukleonenpotentials zu erwarten sein. Da aber nach den Gleichungen (6.18), (6.19), (6.20) und (6.26) die Amplituden $T_{s't}^{(2) S(i)}$ und $\tilde{T}^{(1) S(i)}$ für die verschiedenen Subsysteme im Aufbruchquerschnitt auf komplizierte Weise miteinander interferieren, ist es fast unmöglich, auf Grund der Eigenschaften des Dreinukleonenpotentials (z.B. Kenntnis von attraktiven und repulsiven Bereichen) vorherzusagen, welcher Effekt zu erwarten ist.

Da im allgemeinen die Abweichung so klein ist, ist es nicht sinnvoll $\sigma^{(2)}$ und $\sigma^{(1)}$ in einer Abbildung darzustellen. Es ist daher in allen Abbildungen, die den Wirkungsquerschnitt zeigen und die im Folgenden diskutiert werden, außer $\sigma^{(2)}$ die zehnfach-überhöhte Abweichung $10 \cdot \Delta\sigma$ dargestellt; so wird der Effekt des Dreinukleonenpotentials am besten sichtbar.

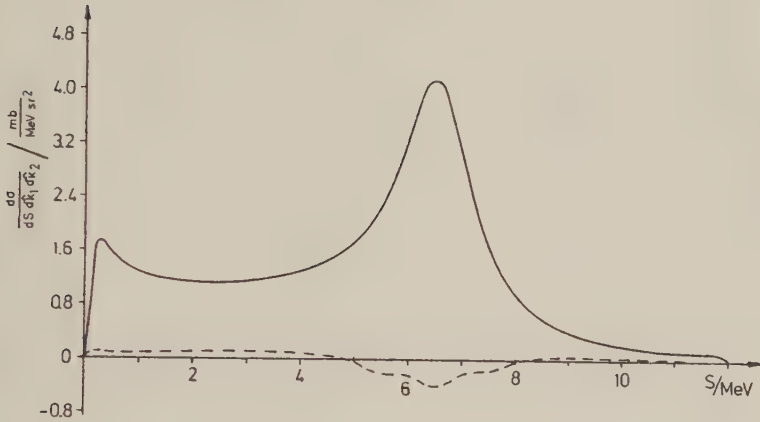


Abbildung 9.1: Aufbruchwirkungsquerschnitt ohne Dreinukleonenpotential (durchgezogene Linie) und Abweichung mit Dreinukleonenpotential, multipliziert mit 10 (gestrichelte Linie), für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = 15,22^\circ$, $\theta_2 = 116,47^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$

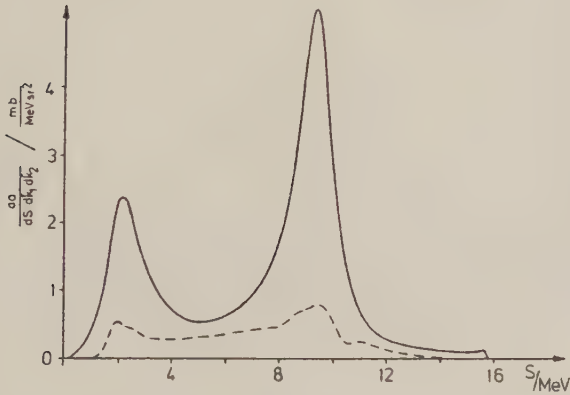


Abbildung 9.2: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = 30,45^\circ$, $\theta_2 = 79,82^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

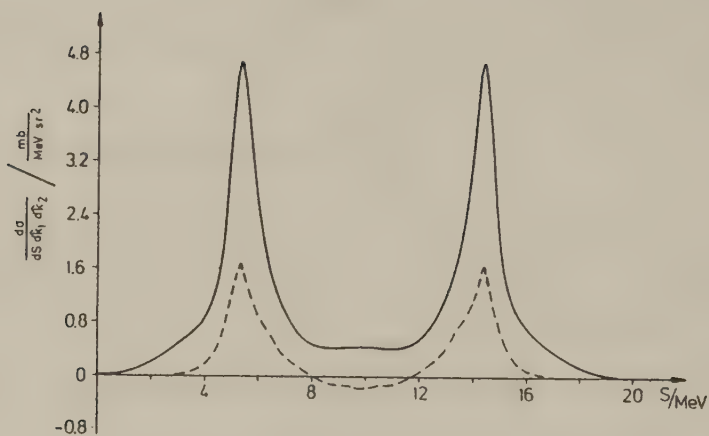


Abbildung 9.3: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 48,14^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

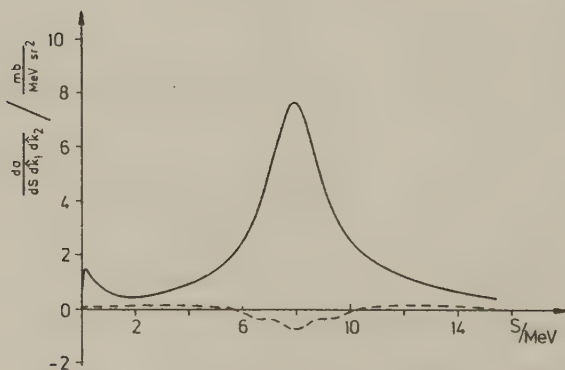


Abbildung 9.4: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 15,22^\circ$ und $\varphi_{12} = 0^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

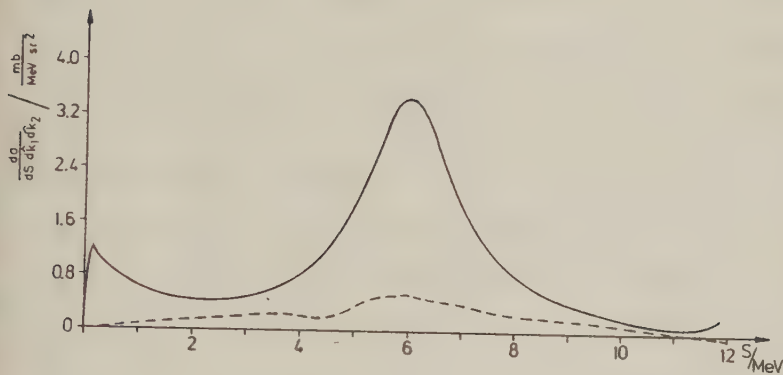


Abbildung 9.5: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$, $\theta_1=\theta_2=30,45^\circ$ und $\phi_{12}=0^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

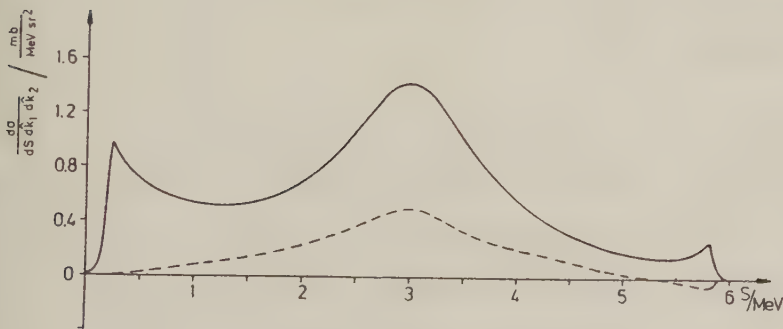


Abbildung 9.6: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$, $\theta_1=\theta_2=48,14^\circ$ und $\phi_{12}=0^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

In den Abbildungen 9.1 bis 9.3 sind für $E_{lab} = 14,4 \text{ MeV}$ zu einer Folge von kinematischen Kurven Aufbruchquerschnitte mit 2-3- und 1-3-FSI-Peaks dargestellt. Da das Proton die Nummer 3 trägt, sind beides n-p-FSI-Peaks. Die Laborwinkel Θ_1 und Θ_2 sind so gewählt, daß im rechten Peak die exakte FSI-Konfiguration mit $p_2=0$ vorliegt, im linken Peak jedoch nur für die symmetrischen Winkel $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_{FSI}^{sym} = 48,14^\circ$ der Relativimpuls $p_1=0$ verschwindet. Dieselben kinematischen Konfigurationen wie in den 1-3-FSI-Peaks werden in den Abbildungen 9.4 bis 9.6 in den 1-2-FSI-Peaks dargestellt. Damit auch hier eine n-p-FSI vorliegt, muß in Detektor 1 das Proton nachgewiesen werden. Die Höhen der sich entsprechenden Peaks unterscheiden sich, weil die Phasenraumfaktoren verschieden sind; die Absolutquadrate $|M|^2$ jedoch sind identisch. Aus den Abbildungen ergibt sich folgendes: Wenn der FSI-Winkel klein und der des nicht an der FSI beteiligten Nukleons groß ist, sind die Abweichungen $\Delta\sigma$ negativ; bei $\Theta_{FSI} = 15,22^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = -1\%$ (Abb. 9.1 und Abb. 9.4). Mit wachsendem FSI-Winkel wird $\Delta\sigma_{rel}$ größer: Etwa bei $\Theta_{FSI} \approx 20^\circ$ ist der Nulldurchgang, bei $\Theta_{FSI} = 30,45^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = +1,6\%$ (Abb. 9.2 und Abb. 9.5) und bei $\Theta_{FSI} = 48,14^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = 3,7\%$ (Abb. 9.3 und Abb. 9.6).

Ein ähnliches Verhalten zeigt das Dreinukleonenpotential bei höheren Einschußenergien in der n-p-FSI-Konfiguration, hier sind die Effekte sogar noch stärker ausgeprägt. Für $E_{lab} = 18,5 \text{ MeV}$ gilt (das Proton sei das Nukleon 3): Bei $\Theta_{FSI} = 16,45^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = -2,7\%$ (Abbildung 9.7) und bei $\Theta_{FSI} = \Theta_{FSI}^{sym} = 49,17^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = +4,8\%$ (Abbildung 9.8); der Nulldurchgang von $\Delta\sigma$ ist etwa bei $\Theta_{FSI} = 27^\circ$. Bei kleineren Einschußenergien ist der Einfluß des Dreinukleonehpotentials schwächer. Hier ergibt sich für die n-p-FSI-Peaks zu $E_{lab} = 7,5 \text{ MeV}$ das Folgende: Bei $\Theta_{FSI} = 15,87^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = 0,6\%$ (Abbildung 9.9), und bei $\Theta_{FSI} = \Theta_{FSI}^{sym} = 42,82^\circ$ ist $\Delta\sigma_{rel} = +2\%$ (Abbildung 9.10). Das Dreinukleonenpotential verstärkt

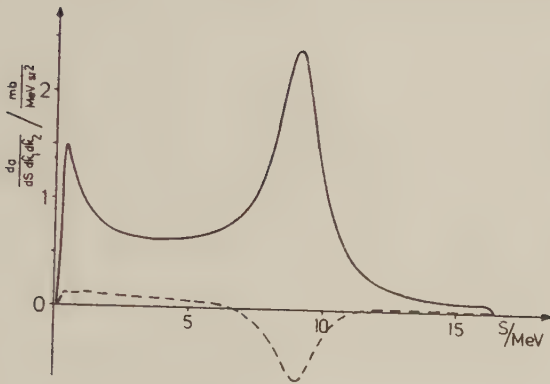


Abbildung 9.7: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 18,5 \text{ MeV}$, $\Theta_1 = 16,15^\circ$, $\Theta_2 = 116,12^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

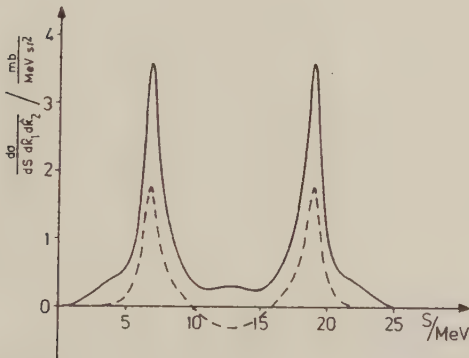


Abbildung 9.8: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 18,5 \text{ MeV}$, $\Theta_1 = \Theta_2 = 49,17^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

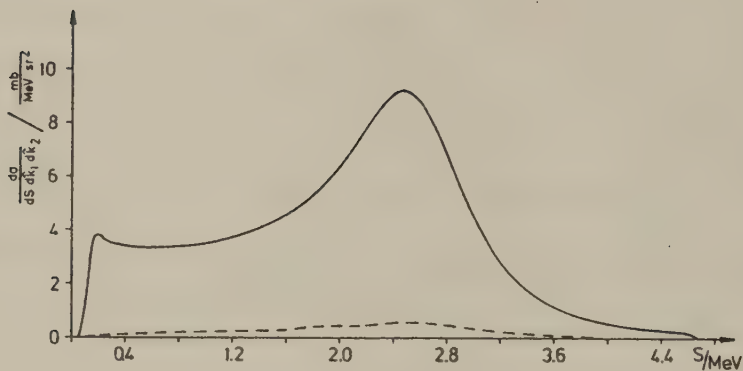


Abbildung 9.9: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 7,5 \text{ MeV}$, $\theta_1 = 15,87^\circ$, $\theta_2 = 100,70^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

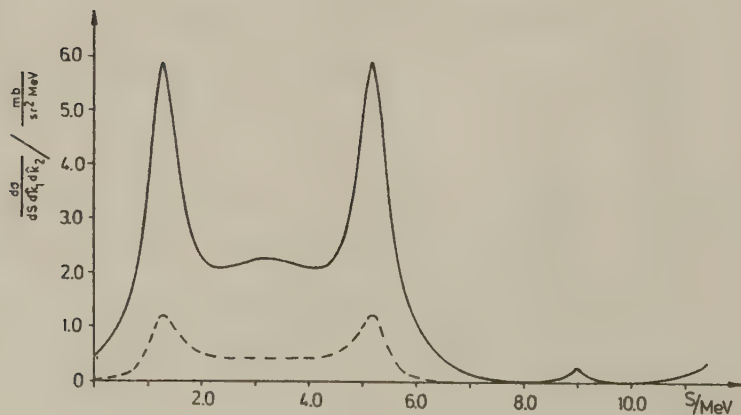


Abbildung 9.10: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 7,5 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 42,82^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

also den Wirkungsquerschnitt im FSI-Peak auch bei kleinen FSI-Winkeln.

Damit zeigt sich, daß der Einfluß des Dreinukleonenpotentials auf den Wirkungsquerschnitt im n-p-FSI-Peak sowohl von der Richtung, in die die beiden an der FSI beteiligten Nukleonen laufen, als auch von der Energie der einlaufenden Neutronen abhängt. Dasselbe muß auch für den n-n-FSI-Peak gelten, weil ja das in dieser Arbeit benutzte Dreinukleonenpotential isospin-unabhängig ist. Das aber widerspricht der von Šlaus et al. [Šla 82] vermuteten These, daß das Dreinukleonenpotential verantwortlich für die Unsicherheit sei, die bei der Messung der n-n-Streulänge a_{nn} existiert. Diese Streulänge a_{nn} läßt sich aus n-d-Aufbruchwirkungsquerschnitten bestimmen, indem der gemessene n-n-Peak durch Faddeev-Rechnungen mit separablen Zweinukleonenpotentialen angepaßt wird, dabei wurde zum Beispiel $a_{nn} = (-16,3 \pm 1,6) \text{ fm}$ gefunden [Kec 75]. Ganz andere Werte ergeben sich, wenn a_{nn} aus dem n-n-FSI-Peak der π -d-Streuung abgeleitet wird: $a_{nn} = (-12,6 \pm 0,5) \text{ fm}$ [Gab 81]. Šlaus et al. behaupten, daß das Fehlen des Dreinukleonenpotentials in der Faddeev-Rechnung zum n-d-System für den "falschen" Wert $a_{nn} = -16,3 \text{ fm}$ verantwortlich sei, hingegen der aus der π -d-Streuung gewonnene Wert der bessere sei, da im π -d-System kein Dreinukleonenpotential möglich ist.

Dies soll nun genauer untersucht werden. Da das Zweinukleonenpotential im Singulett-System, wie in Kapitel 3 dargestellt worden ist, ladungsunabhängig ist, muß man, um den n-n-FSI-Peak gut beschreiben zu können, mit einem Singulett-Potential rechnen, das die n-n-Niederenergie-Streudaten gut wiedergibt. Solche Potentiale erhält man, indem man den Stärkefaktor λ_{0A} des Malfliet-Tjøn-Potential gemäß Tabelle 3.3 wählt,

die übrigen Parameter beibehält (s. Tabelle 3.2). So erhält man verschiedene UPA-Potentiale, deren zugehörige Streulängen variieren. Zwar verändern sich nach Tabelle 3.3 auch die Reichweiten r_0 geringfügig; da aber der Aufbruchsquerschnitt im FSI-Peak von r_0 nur sehr schwach abhängt, kann die Variation von r_0 vernachlässigt werden.

Es ist für verschiedene 1-2-FSI-Konfigurationen, bei denen das Proton das Nukleon 3 sein muß, damit die Energie im n-n-Subsystem verschwindet, zuerst der Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(1)}$ berechnet werden; dabei wurde das UPA-Potential zum Stärkeparameter $\lambda_{01} = -19,393 \text{ MeV}$, wozu die Streulänge $a_{nn} = -18,45 \text{ fm}$ gehört, benutzt. Diese Rechnung soll das experimentelle Meßergebnis simulieren, das dann mit Rechnungen ohne Dreinukleonenpotential ausgewertet wird, wobei $\lambda_{01} = -19,36 \text{ MeV}$, $\lambda_{01} = -19,393 \text{ MeV}$ und $\lambda_{01} = -19,42 \text{ MeV}$ gewählt wird (die zugehörigen Streulängen sind nach Tabelle 3.3: $a_{nn} = -17,72 \text{ fm}$, $a_{nn} = -18,45 \text{ fm}$ und $a_{nn} = -19,08 \text{ fm}$). In Tabelle 9.5 sind die Ergebnisse für $E_{\text{lab}} = -14,4 \text{ MeV}$ eingetragen.

$\Theta_1 = \Theta_2$	Θ_3	$\sigma^{(1)}$ ($\lambda_{01} = -19,393$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,36$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,393$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,42$)	$\tilde{a}_{nn} / \text{fm}$
10,15°	133,84°	28,337	26,573	28,810	30,850	-18,28
20,30°	102,32°	10,873	10,144	10,931	11,647	-18,40
30,44°	79,82°	8,3039	7,6229	8,2059	8,7354	-18,56
40,59°	61,18°	5,0929	4,6120	4,9711	5,2975	-18,68
50,74°	43,61°	2,7750	2,4818	2,6700	2,8412	-18,85

Tabelle 9.5.: Streulängen Anpassung für n-n-FSI-Peaks zu $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$.
Die Einheiten der Wirkungsquerschnitte sind: $\text{mb}/\text{MeV} \cdot \text{sr}^2$.

In Spalte 1 ist der FSI-Winkel $\Theta_{\text{FSI}} = \Theta_1 = \Theta_3$, in Spalte 2 der Winkel Θ_3 des Protons, in Spalte 3 ist der Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(1)}$ zu $a_{nn} = -18,45 \text{ fm}$ und in den Spalten 4 bis 6 sind die Wirkungs-

querschnitte $\sigma^{(2)}$ zu den drei oben genannten Streulängen aufgeführt; diese Wirkungsquerschnitte sind die Maxima der Peaks, also genau die zu den FSI-Konfigurationen mit $\vec{p}_3 = 0$ gehörenden Werte. Die Streulängen $\tilde{a}_{nn}$, die in Spalte 7 stehen, sind aus den drei Werten zu $\sigma^{(1)}$ durch quadratische Interpolation so bestimmt, daß zu $\tilde{a}_{nn}$ die Peakhöhe $\tilde{\sigma}^{(2)} = \sigma^{(2)}$ der Spalte 3 gehört. Die Peaks werden also, was ausreichend ist, nur in der Höhe angepaßt. In Tabelle 9.6 sind für $E_{lab} = 9,5$ MeV die Ergebnisse in gleicher Weise aufgelistet.

$\theta_1 = \theta_2$	θ_3	$\sigma^{(3)}$ ($\lambda_{03} = -19,393$)	$\sigma^{(1)}$ ($\lambda_{01} = -19,36$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{02} = -19,393$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{02} = -19,42$)	$\tilde{a}_{nn}/fm$
$8,87^\circ$	$132,74^\circ$	58,464	54,137	58,654	62,770	-18,42
$17,74^\circ$	$102,32^\circ$	24,969	23,046	24,860	26,508	-18,49
$26,60^\circ$	$81,29^\circ$	13,758	12,584	13,523	14,375	-18,64
$35,47^\circ$	$63,96^\circ$	8,5838	7,7858	8,3717	8,9038	-18,71
$44,38^\circ$	$47,48^\circ$	4,6181	4,1682	4,4856	4,7744	-18,76

Tabelle 9.6: Streulängenanpassung für n-n-FSI-Peaks zu $E_{lab} = 9,5$ MeV
(Einheiten wie bei Tabelle 9.5).

Es zeigt sich, daß abhängig von Einschußenergie E_{lab} und FSI-Winkel aus diesem simulierten Experiment unterschiedliche Werte für die n-n-Streulänge abgeleitet werden. Für $E_{lab} = 14,4$ MeV variieren die Ergebnisse von $\tilde{a}_{nn} = -18,28 fm$ bis $\tilde{a}_{nn} = 18,83 fm$ und bei $E_{lab} = 9,5 MeV$ von $\tilde{a}_{nn} = -18,42 fm$ bis $\tilde{a}_{nn} = -18,73 fm$. Wie schon bei der Diskussion der Ergebnisse zum n-p-FSI-Peak ergibt sich auch beim n-n-FSI-Peak, daß bei der größeren Einschußenergie der Effekt des Dreinukleonenpotentials stärker wird. Wichtig ist jedoch, daß das Dreinukleonenpotential sicherlich nicht den Peak so weit absenken kann, daß sich eine Streulänge ergibt, die etwa bei $\tilde{a}_{nn} = -16,3 fm$ liegt. Damit läßt sich also im Rahmen des

in dieser Arbeit benutzten Modelles ausschließen, daß das Dreinukleonenpotential verantwortlich ist für die unterschiedlichen Meßergebnisse der n-n-Streulänge, und es ist weiterhin ungeklärt, was diese experimentelle Diskrepanz verursacht.

Eine analoge Betrachtung soll nun auch für den n-p-FSI-Peak durchgeführt werden, da durch die simulierte Streulänge $\tilde{a}_{np}$, die sich auf dieselbe Weise bestimmen läßt, der Effekt des Dreinukleonenpotentials besser quantifizieren läßt. Ein Vorteil ist dabei, daß für das n-p-Singulett-System die Streulänge $\tilde{a}_{np}^{sing}$ sehr genau sich aus der elastischen n-p-Streuung bestimmen läßt, der experimentelle Wert ist: $a_{np}^{sing} = (-23,715 \pm 0,015) \text{ fm}$ [Noy 71].

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes $\sigma^{(1)}$ im n-p-FSI-Peak wurde das durch die Parameter in Tabelle 3.2 gegebene UPA-Potential benutzt, die drei Werte zu $\sigma^{(2)}$ ergeben sich mit den Potentialen, die zu $a_{np}^{sing} = -23,33 \text{ fm}$, $a_{np}^{sing} = -23,78 \text{ fm}$ und $a_{np}^{sing} = -24,24 \text{ fm}$ gehören (siehe Tabelle 3.3). Aus diesen Wirkungsquerschnitten folgen wie oben beim n-n-FSI-Peak die interpolierten Streulängen $\tilde{a}_{np}^{sing}$. In Tabelle 9.7 sind die Ergebnisse für $E_{lab} = 14,4 \text{ MeV}$ und in Tabelle 9.8 die für $E_{lab} = 9,5 \text{ MeV}$ zusammengestellt.

$\theta_1 = \theta_2$	θ_3	$\sigma^{(3)}$ ($\lambda_{01} = -19,5719$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,5599$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,5119$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,5839$)	$\tilde{a}_{np}/\text{MeV}$
10,15°	133,84°	13,874	13,613	14,046	14,504	-23,60
20,30°	102,32°	4,7774	4,6320	4,7815	4,9393	-23,76
30,44°	79,82°	3,5345	3,3696	3,4802	3,5968	-23,99
40,59°	61,18°	2,3213	2,1950	2,2635	2,3358	-24,15
50,74°	43,61°	1,3568	1,2740	1,3104	1,3483	-24,33

Tabelle 9.7: Streulängen Anpassung für n-p-FSI-Peaks zu $E_{lab} = 14,4 \text{ MeV}$
(Einheiten wie bei Tabelle 9.5).

$\theta_1 = \theta_2$	θ_3	$\sigma^{(3)}$ ($\lambda_{01} = -19,5719$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,5539$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,5719$)	$\sigma^{(2)}$ ($\lambda_{01} = -19,5839$)	$\tilde{a}_{np} / \text{MeV}$
8,87°	132,74°	27,849	27,032	27,904	28,826	-23,75
17,74°	102,32°	11,285	10,829	11,174	11,539	-23,92
26,60°	81,29°	5,8612	5,5787	5,7556	5,9422	-24,04
35,47°	63,96°	3,7591	3,5567	3,6677	3,7848	-24,14
44,38°	49,48°	2,0632	2,0632	2,1236	2,1873	-24,18

Tabelle 9.8: Streulängen Anpassung für n-p-FSI-Peaks zu $E_{\text{lab}} = 9,5 \text{ MeV}$
(Einheiten wie bei Tabelle 9.5).

Die hier angegebenen Wirkungsquerschnitte gehören zu 1-2-FSI-Konfigurationen, deshalb ist das Proton als Teilchen 2 festgelegt worden. Die so berechneten Werte für $\tilde{a}_{np}^{\text{sing}}$ zeigen ebenfalls die Abhängigkeit des Effektes des Dreinukleonenpotentials von der Einschußenergie und vom FSI-Winkel; die Streulänge, die sich aus diesem simulierten Experiment ergibt, ist also $\tilde{a}_{np}^{\text{sing}} = (-24,0 \pm 0,4) \text{ fm}$ und somit etwa auf 2% festgelegt. Da der maximale Effekt des Dreinukleonenpotentials etwa genau so groß ist wie beim derzeitigen Stand der Meßtechnik die Meßfehler der n-d-Aufbruchwirkungsquerschnitte, ist es allerdings schwierig, mit solchen Experimenten die Existenz von Dreinukleonenkräften nachzuweisen. Dasselbe gilt auch für die n-n-FSI; wie oben gezeigt wurde, sind dafür die Abweichungen $\Delta\sigma$ etwa so groß wie bei der n-p-FSI.

Aus den in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnissen erkennt man, daß die Abweichung $\Delta\sigma$, die das Dreinukleonenpotential bewirkt, von der kinematischen Konfiguration abhängt: Das Dreinukleonenpotential kann den Wirkungsquerschnitt je nach kinematischen Parametern vergrößern oder verkleinern.

9.3. Aufbruchquerschnitte der QFS

Wie bei der FSI ergibt sich auch bei der QFS-Konfiguration ein Peak im Wirkungsquerschnitt, dessen Höhe etwa dieselbe Größenordnung wie die FSI-Peaks haben, aber wesentlich breiter ist. Da nach Abbildung 6.4 die QFS-Kurve immer in der Nähe der FSI-Kurven verläuft, treten im allgemeinen neben dem QFS-Peak auch noch der 1-3- und 2-3-FSI-Peak auf. Da für alle QFS-Konfigurationen die Impulsellipsen die k_1 - und k_2 -Achsen wegen $\theta_1 \leq \theta_{QFS}^{\max}$ und $\theta_2 \leq \theta_{QFS}^{\max}$ schneiden, fällt wegen des Phasenraumfaktors (6.36) der Wirkungsquerschnitt am Anfang und Ende der kinematischen Kurve auf Null ab.

Abbildung 9.11 stellt den Verlauf des Wirkungsquerschnittes für die symmetrische Winkelstellung mit $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{QFS}^{\text{sym}} = 39,60^\circ$ dar, in Abbildung 9.12 wird der Wirkungsquerschnitt für $\theta_1 = 28,29^\circ$ und $\theta_2 = 49,66^\circ$ gezeigt; für die beiden Konfigurationen ist $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$ und $\varphi_{1,2} = 180^\circ$. In beiden Fällen ist die Abweichung $\Delta\sigma$ im Bereich der FSI-Peaks positiv; dies deckt sich mit den Ergebnissen, die im vorhergehenden Abschnitt bei der Betrachtung der exakten FSI-Konfigurationen gefunden worden sind. Im Gegensatz dazu wird im QFS-Peak der Wirkungsquerschnitt durch das Dreinukleonenpotential abgeschwächt; im QFS-Peak gilt für Abbildung 9.11 $\Delta\sigma_{\text{rel}} = -2,3\%$ und für Abbildung 9.12 $\Delta\sigma_{\text{rel}} = -2,7\%$. Anders als bei den Abweichungen $\Delta\sigma$ in den FSI-Peaks (vergleiche die Abbildungen 9.1 bis 9.10) kann man bei $\Delta\sigma$ in der Umgebung des QFS-Punktes lokale Extrema beobachten. Dies hat zur Folge, daß nicht nur Höhe und Breite des Peaks geändert wer-

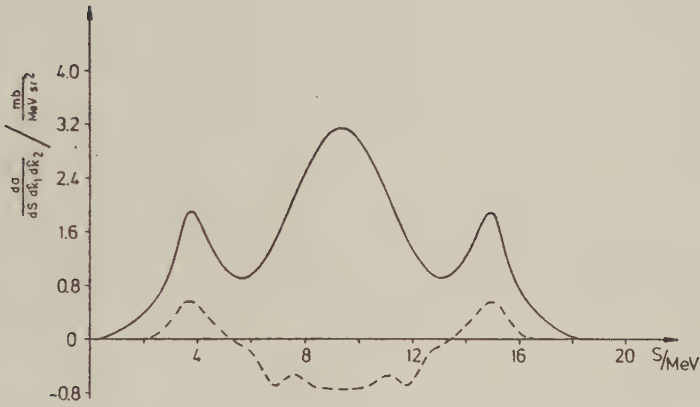


Abbildung 9.11: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 39,60^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

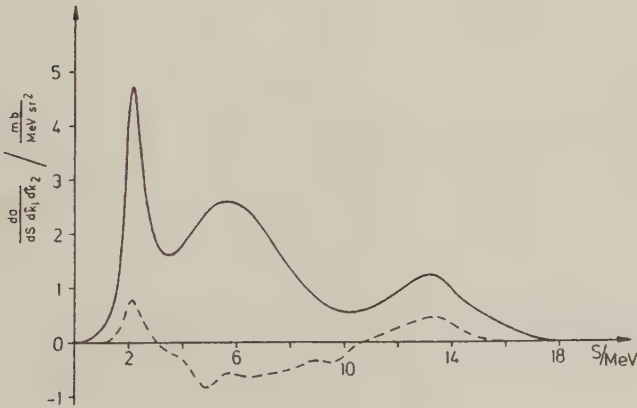


Abbildung 9.12: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = 28,29^\circ$, $\theta_2 = 49,66^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

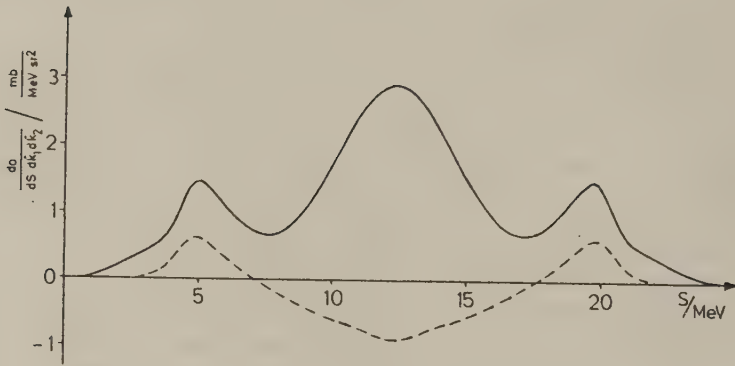


Abbildung 9.13: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 18,5 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 40,98^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

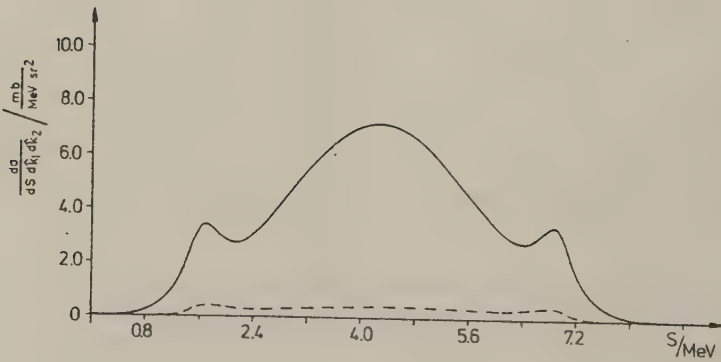


Abbildung 9.14: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 7,5 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 32,12^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

den, sondern sogar die Form des Peaks und die Lage des Maximums. So gilt zum Beispiel in Abbildung 9.12 für die maximale relative Abweichung bei $S=4,8$ MeV (also links vom Punkt mit der QFS-Konfiguration, die bei $S=5,25$ MeV liegt) $\Delta\sigma_{rel} = -3,3\%$. Die Oszillationen in der Abweichung $\Delta\sigma$ werden durch Interferenz der Amplituden $T_{st}^{(a)S(i)}$ und $\tilde{T}^{(a)S(i)}$ miteinander hervorgerufen. Einen ähnlichen Verlauf des Wirkungsquerschnittes zeigt für $E_{lab} = 18,5$ MeV und $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{QFS}^{sym} = 40,98^\circ$ die Abbildung 9.13. Hier beträgt bei der QFS-Konfiguration die relative Abweichung $\Delta\sigma_{rel} = -3,1\%$.

Anders ist es bei $E_{lab} = 7,5$ MeV, wo der Wirkungsquerschnitt für $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{QFS}^{sym} = 32,12^\circ$ in Abbildung 9.14 dargestellt ist. Hier wird der Wirkungsquerschnitt längs der gesamten kinematischen Kurve durch das Dreinukleonenpotential schwach vergrößert; am QFS-Punkt gilt: $\Delta\sigma_{rel} = +0,5\%$. Sowohl bei $E_{lab} = 18,5$ MeV als auch bei $E_{lab} = 7,5$ MeV sind die Oszillationen in $\Delta\sigma$ nur sehr gering.

Daß das Verhalten des Wirkungsquerschnittes im Peak zu einer QFS-Konfiguration, bei der E_3 nicht exakt verschwindet, was bei Winkeln (θ_1, θ_2) der Fall ist, die in der Nähe der QFS-Kurve in Abbildung 6.4 liegen, ähnlich wie bei den oben beschriebenen Fällen mit $E_3=0$ ist, zeigen die Abbildungen 9.3, 9.8 und 9.10. Genau in der Mitte zwischen den beiden FSI-Peaks zu $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{FSI}^{sym}$ liegen die sehr schwach ausgeprägten QFS-Peaks (bei $E_{lab} = 14,4$ MeV gilt zum Beispiel in dieser Konfiguration: $E_3 = 302$ keV). Dennoch zeigt $\Delta\sigma$ genau dasselbe Verhalten wie bei den exakten QFS-Konfi-

gurationen: $\Delta\sigma$ ist für 7,5 MeV positiv, aber für 14,4 MeV und 18,5 MeV negativ.

Damit ergibt sich für die QFS ein Verhalten, daß einheitlicher als bei der FSI ist: Die Abweichungen hängen im wesentlichen von der Einschüßenergie E_{lab} ab: Für $E_{\text{lab}} < 8\text{MeV}$ ist die Abweichung $\Delta\sigma$ schwach positiv, bei größeren Werten von E_{lab} ist $\Delta\sigma$ negativ, wird aber auch bei $E_{\text{lab}}=18,5\text{ MeV}$ nicht größer als 4%. Wie bei der FSI-Konfiguration ist also ein experimenteller Nachweis der Effekte des Dreinukleonenpotentials sehr schwierig. Völlig unmöglich dürfte es sein, die Oszillationen in $\Delta\sigma$ experimentell festzustellen.

9.4 Wirkungsquerschnitt zur kollinearen Konfiguration

Im Gegensatz zu FSI und QFS, gibt es bei der kollinearen Konfiguration keinen Mechanismus, der den Wirkungsquerschnitt verstärkt. Es soll nur die spezielle kollineare Situation mit $\vec{q}_3 = 0$ betrachtet werden, weil dieser Endzustand sich mit großer Wahrscheinlichkeit aus Zuständen entwickelt hat, bei denen zum Zeitpunkt der Reaktion die drei Nukleonen sich in gleichen Abständen auf einer Geraden befunden haben. Für diese Anordnung der Nukleonen wirkt das Dreinukleonenpotential repulsiv und ist im Vergleich zum Zweinukleonenpotential relativ stark. Aus diesem Grunde ist die Berechnung des Aufbruchquerschnittes gerade für

diese spezielle Konfiguration wichtig. Von Nachteil bei der Kollinearität ist, wie oben schon erläutert worden ist, daß diese Konfiguration auf der kinematischen Kurve immer in der Nähe von FSI-Konfigurationen liegt. Dies wird aus Abbildung 9.15 ersichtlich, wo für $E_{\text{lab}} = 14,4$ MeV Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(a)}$ und Abweichung $\Delta\sigma$ zu den Laborwinkeln $\theta_1 = 24,25^\circ$ und $\theta_2 = 99,30^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ dargestellt sind; der kollineare Punkt mit $\vec{q}_3 = 0$ liegt bei $S = 2,76$ MeV (dort sind die Schwerpunktswinkel $\vartheta_1 = 40^\circ$ und $\vartheta_2 = 140^\circ$), und ist daher noch stark durch den benachbarten 2-3-FSI-Peak beeinflusst, der bei $S = 0,92$ MeV sich befindet. Einen ähnlichen Verlauf für $\sigma^{(a)}$ und $\Delta\sigma$ zeigt Abbildung 9.16 (symmetrische Winkelstellung: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{coll}}^{\text{sym}} = 56,54^\circ$); hier liegt der kollineare Punkt bei $S = 6,64$ MeV, also genau zwischen den beiden FSI-Peaks; für die Schwerpunktswinkel gilt $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 90^\circ$, das heißt, die Gerade mit den kollinearen Impulsen $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ und $\vec{q}_3 = 0$ steht senkrecht auf $\vec{q}_0$. Auffällig bei diesen beiden kollinearen Konfigurationen ist, daß das Dreinukleonenpotential im gesamten Bereich zwischen den beiden FSI-Peaks den Wirkungsquerschnitt nahezu gleichmäßig vergrößert; bei der symmetrischen Winkelstellung, wo im Minimum zwischen den FSI-Peaks $\sigma^{(a)} = 0,46 \text{ mb/MeV sr}^2$ und $\Delta\sigma = 0,043 \text{ mb/MeV sr}^2$ gilt, ergibt sich somit eine Verstärkung von $\Delta\sigma_{\text{rel}} = 9,3\%$.

Dies ist ein Ergebnis, das sehr verschieden von dem bei der ebenfalls symmetrischen Konfiguration mit $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{FSI}}^{\text{sym}} = 49,14^\circ$ ist, das in Abbildung 9.3 dargestellt ist. Dort wirkt sich im Minimum zwischen den FSI-Peaks noch die QFS aus, was negative Werte für $\Delta\sigma$ zur Folge hat. Es ist zu hoffen, daß dieses so unterschiedliche Verhalten im Minimum experimentell bestätigt werden kann, weil es bei diesem Vergleich nicht so sehr auf Absolutmessungen

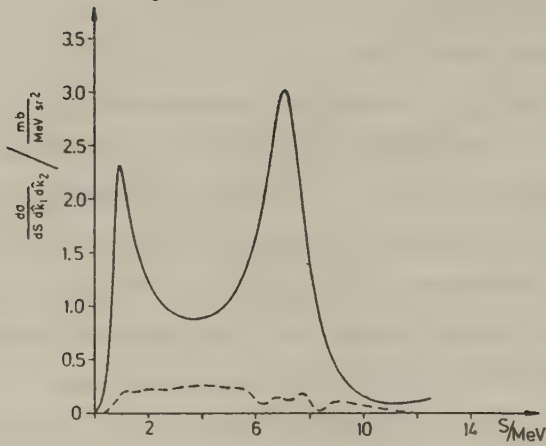


Abbildung 9.15: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = 24,25^\circ$, $\theta_2 = 99,30^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

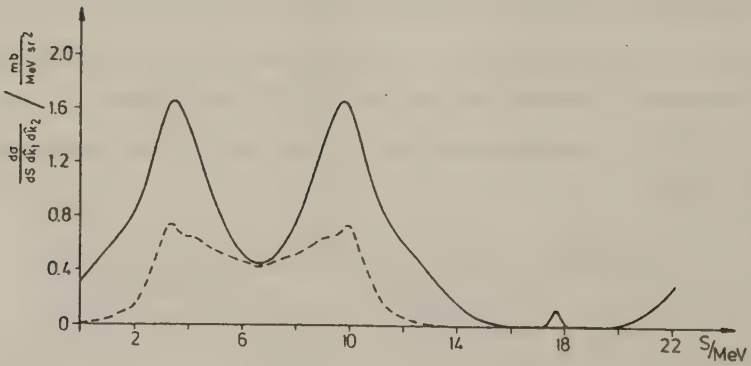


Abbildung 9.16: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 56,54^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$ (Kurven wie in Abbildung 9.1)

ankommt, die schwierig und daher mit relativ großen Fehlern behaftet sind, sondern nur auf das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte in den Minima. Wie bei den kollinearen Konfigurationen mit $\vec{q}_3=0$, bei denen die durch $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ gebildete Gerade gegen den Eingangsstrahl nicht so stark geneigt ist, ist auch bei den kollinearen Konfigurationen, wo $\vec{q}_3 \neq 0$ ist, die FSI-Konstellation auf der kinematischen Kurve so nahe, daß der kollineare Punkt im Abfall des FSI-Peaks liegt; es ist somit schwierig, ein typisches Verhalten von $\Delta\sigma$ für die Kollinearität von dem der FSI zu trennen.

Bei größeren und kleineren Einschußenergien zeigen Wirkungsquerschnitt und Abweichung einen ähnlichen Verlauf wie bei $E_{\text{lab}} = 14,4$ MeV. Für die symmetrischen Konfigurationen sind Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(a)}$, Abweichung $\Delta\sigma$ und relative Abweichung $\Delta\sigma_{\text{rel}}$ im kollinearen Punkt angegeben. Es zeigt sich, daß die Abweichungen $\Delta\sigma$

$E_{\text{lab}}/\text{MeV}$	$\theta_1 = \theta_2$	$\sigma^{(a)}/\text{MeVsr}/\text{mb}$	$\Delta\sigma/\text{MeVsr}/\text{mb}$	$\Delta\sigma_{\text{rel}}$
7,5	51,99°	1,57	0,055	3,5%
9,5	54,21°	1,05	0,051	4,9%
14,4	56,56°	0,46	0,043	9,3%
18,5	57,41°	0,26	0,035	13,5%

Tabelle 9.9: Wirkungsquerschnitte im kollinearen Punkt der symmetrischen Konfigurationen

mit wachsender Energie E_{lab} zwar schwach abnehmen, weil aber in stärkerem Maße die Wirkungsquerschnitte $\sigma^{(a)}$ kleiner werden, nehmen die relativen Abweichungen noch zu; also wird auch hier der Effekt des Dreinukleonenpotentials bei größeren Energien deutlicher. Selbst bei $E_{\text{lab}} = 9,5$ MeV hat man bei einem Wirkungsquerschnitt von etwa $1 \text{ mb}/\text{MeVsr}^2$ noch fast 5% Unterschied: demnach sollte trotz

des im Vergleich zu FSI- und QFS-Wirkungsquerschnitten kleinen Wertes ein Experiment zum Nachweis des Dreinukleonenpotentials aussichtsreich sein, vorausgesetzt wird dabei allerdings wieder, daß die experimentellen Fehler unter 5% gedrückt werden können.

9.5 Wirkungsquerschnitte für Sternkonfigurationen

Wie bei der Kollinearität sind bei der Sternkonfiguration die Wirkungsquerschnitte relativ klein. Interessant sind die Sterne deshalb, weil die zugehörigen Endzustände sich mit großer Wahrscheinlichkeit aus Zuständen entwickeln, bei denen zur Zeit der Reaktion die drei Nukleonen ein gleichseitiges Dreieck bilden; dies ist eine Anordnung für die das Dreinukleonenpotential attraktiv wirkt und im Vergleich zum Zweinukleonenpotential relativ stark ist. Dies sollte als deutlicher Effekt im Aufbruchwirkungsquerschnitt zur Sternkonfiguration sich bemerkbar machen.

Als erstes sollen die Sternkonfigurationen zur Einschußenergie $E_{\text{lab}} = 14,4$ MeV untersucht werden, danach für größere und kleinere Werte von E_{lab} auf die Unterschiede hingewiesen werden. Bei der Diskussion der kinematischen Verhältnisse wurde klar, daß nicht alle Sterne für Experimente geeignet sind, diese sollen deshalb hier nicht betrachtet werden. Dazu gehören die koplanaren Sterne zu $\varphi_{12} = 0^\circ$ (siehe Abbildung 6.1) und auch ein Teil der koplanaren Sterne zu $\varphi_{12} = 180^\circ$, deren Laborwinkel auf Kurve 2 der Abbildung 9.4 liegen. Ebenso scheidet der mittlere Teil dieser Kurve wegen der Nähe zum verbotenen Gebiet aus. Dies soll mit Abbildung 9.17 demonstriert werden. Die Laborwinkel sind $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{Stern}}^{\text{sym}2} = 70,34^\circ$. Die Abzisse zeigt, daß die zugehörige geschlossene kinematische

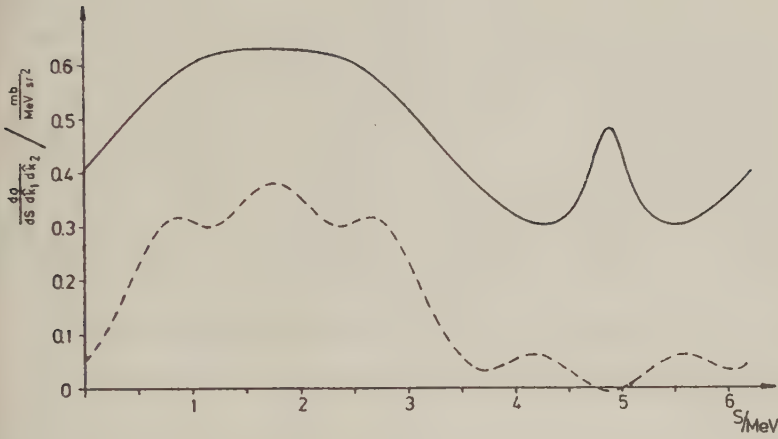


Abbildung 9.17: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$, $\theta_1=\theta_2=70,34^\circ$ und $\varphi_{12}=180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

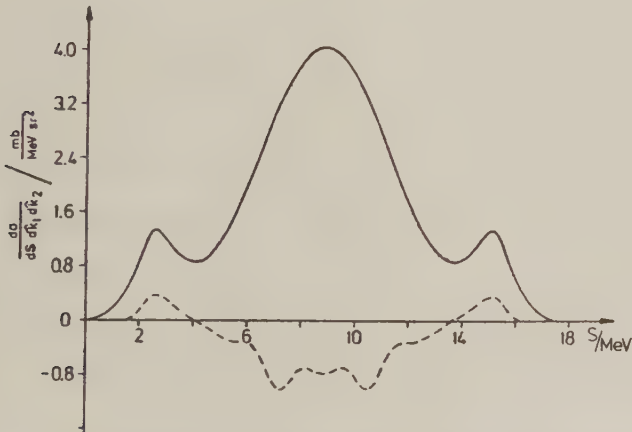


Abbildung 9.18: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$, $\theta_1=\theta_2=33,48^\circ$ und $\varphi_{12}=180^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

Kurve mit der Gesamtlänge $S=6,23$ MeV relativ kurz ist. Die Wirkungsquerschnitte sind sehr klein. Im Maximum bei $S=1,76$ MeV, dies ist genau der Punkt der Sternkonfiguration, ist $\sigma^{(2)} = 0,63 \text{ mb/MeVsr}^2$, die Abweichung ist mit $\Delta\sigma = 0,038 \text{ mb/MeVsr}^2$ recht groß, so daß sich eine relative Abweichung von $\Delta\sigma_{\text{rel}} = 6\%$ ergibt. Dieser Wert ist zwar relativ groß, ist sicherlich in derselben Größenordnung wie der experimentelle Fehler. Der Wirkungsquerschnitt ist insgesamt strukturarm; das breite Maximum und der kleine Peak bei $S=4,87$ MeV, sind im wesentlichen durch den Phasenraumfaktor bestimmt. Auffällig bei der Abweichung $\Delta\sigma$ sind die Oszillationen, die schon bei den QFS-Wirkungsquerschnitten beobachtet worden sind.

Günstig für Experimente zu koplanaren Sternen sind also nur Laborwinkel, die auf Kurve 3 der Abbildung 6.4 liegen; da jedoch diese Kurve in der Nähe der QFS- und FSI-Kurven verläuft, sind also diese Effekte im Wirkungsquerschnitt zu erwarten. Dies wird anhand von Abbildung 9.18 deutlich, wo Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(2)}$ und Abweichung $\Delta\sigma$ für die symmetrische Anordnung ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_{\text{Stern}}^{\text{sym}1} = 33,48^\circ$ und $\varphi_{12} = 180^\circ$) dargestellt sind. Die beiden kleinen Peaks am Rande gehören zur FSI, wo die minimale Relativenergie in den Subsystemen $E_{\text{rel}} = 292$ keV beträgt. Der mittlere Peak wird, was wegen der großen Breite deutlich wird, durch die QFS verursacht; im Maximum gilt: $E_3 = 89$ keV. Mit dieser QFS-Konfiguration fällt die Sternkonfiguration zusammen: Die Schwerpunktswinkel betragen dort: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60^\circ$; für die Winkel α und β , die nach Kapitel 6.3 den Stern eindeutig festlegen, gilt: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0^\circ$. Wie der Wirkungsquerschnitt wird auch die Abweichung $\Delta\sigma$ durch FSI und QFS bestimmt: $\Delta\sigma$ ist im Bereich der FSI-Peaks positiv und im Bereich des QFS-Peaks negativ; Abbildung 9.18 hat also große Ähnlichkeit

mit Abbildung 9.11. Auch für Sternkonfigurationen zu Kurve 3 in Abbildung 6.4, wo $\theta_1 \neq \theta_2$ ist, zeigen $\sigma^{(u)}$ und $\Delta\sigma$ ein Verhalten, das schon für die exakten QFS-Konfigurationen mit $\theta_1 \neq \theta_2$ dargestellt worden ist (Abbildung 9.12). Die Abweichung $\Delta\sigma$, wie sie in Abbildung 9.18 gezeigt worden ist, läßt sich also durch das Verhalten des Dreinukleonenpotentials bei QFS-Reaktionen erklären; einen Effekt, der allein auf Grund der Sternkonfiguration hervorgerufen wird, kann man also nicht ableiten.

Wenn man Sternkonfigurationen, die unbeeinflusst von FSI und QFS sind, untersuchen will, muß man zu nicht-koplanaren Sternen übergehen [Bon 79]. Dazu soll die Folge der Konfigurationen zu $\alpha = 60^\circ$ untersucht werden, die durch $\beta = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $\beta = 90^\circ$ gegeben sind. Die zugehörigen Laborwinkel θ_1 , θ_2 , φ_1 und φ_3 (es sei $\varphi_1 = 0^\circ$) sowie die Schwerpunktwinkel ϑ_1 , ϑ_2 und ϑ_3 in den Sternkonfigurationen sind in Tabelle 9.10 aufgeführt; zusätzlich sind die minimale Relativenergie E_{rel} der Subsysteme, das Minimum von E_3 , das den QFS-Peak festlegt, und die Bogenlänge S_{Stern} der Stern-

β	$\theta_1 = \theta_2$	θ_3	φ_1	φ_3	$\vartheta_1 = \vartheta_2$	ϑ_3	$E_{\text{rel}}^{\text{min}}$	E_3^{min}	S_{Stern}
0°	$33,48^\circ$	180°	180°	180°	60°	180°	292	89	8,86
30°	$35,96^\circ$	$96,47^\circ$	$147,80^\circ$	$253,90^\circ$	$64,34^\circ$	150°	534	619	8,54
60°	$42,43^\circ$	$70,34^\circ$	$126,50^\circ$	$243,43^\circ$	$75,52^\circ$	120°	1180	2066	7,71
90°	$51,03^\circ$	$51,02^\circ$	120°	240°	90°	90°	2012	4043	6,76

Tabelle 9.10: Labor- und Schwerpunktwinkel für eine Folge von Sternkonfigurationen. $E_{\text{rel}}^{\text{min}}$ ist die minimale Subsystemenergie, E_3^{min} ist das Minimum von E_3 auf der kinematischen Kurve. S_{Stern} ist die Bogenlänge der Sternkonfiguration.

konfiguration auf der kinematischen Kurve angegeben. Mit wachsendem β werden $E_{\text{rel}}^{\text{min}}$ und E_3^{min} größer. Bei $\beta = 30^\circ$ machen sich FSI und QFS noch durch deutliche Peaks bemerkbar, wie aus Abbildung 9.19

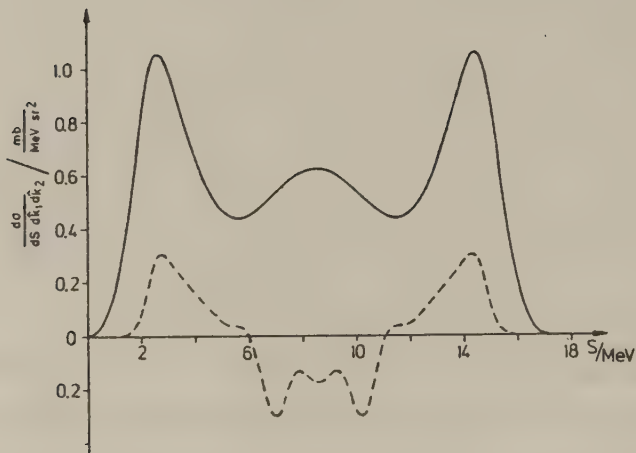


Abbildung 9.19: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$, $\theta_1=\theta_2=35,96^\circ$ und $\varphi_{12}=147,8^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

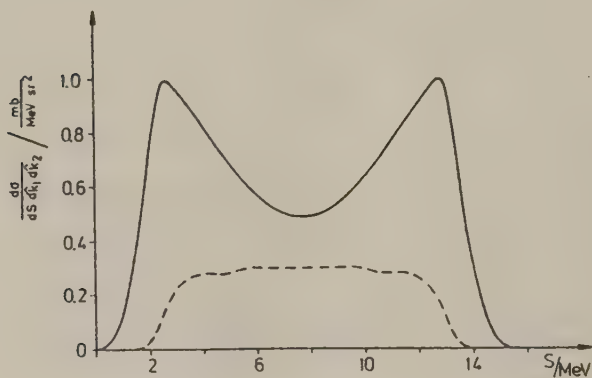


Abbildung 9.20: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$, $\theta_1=\theta_2=42,43^\circ$ und $\varphi_{12}=126,9^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

deutlich wird; der Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(2)}$ ist aber insgesamt wesentlich kleiner als bei $\beta = 0^\circ$. Dies wird besonders deutlich beim QFS-Peak, der bei $\beta = 30^\circ$ kleiner als die FSI-Peaks ist. Die Abweichung $\Delta\sigma$ zeigt das schon bekannte Verhalten: $\Delta\sigma$ ist bei den FSI-Peaks positiv, und negativ ist es beim QFS-Peak. Man kann also sagen, daß die nicht-koplanaren Sterne mit kleinem Neigungswinkel zum Strahl im wesentlichen dasselbe Verhalten haben, wie die koplanaren Sterne, aus denen sie durch Drehen um eine auf den Strahl senkrechte Achse entstehen.

Anders ist die Situation bei $\beta = 60^\circ$, dies ist in Abbildung 9.20 dargestellt. Ein QFS-Peak tritt nicht mehr auf und die beiden Maxima in $\sigma^{(2)}$ können nicht als FSI-Peaks bezeichnet werden, da nach Tabelle 9.10 die Relativenergie zu groß ist. Ganz anders als bei kleineren Werten von β verhält sich die Abweichung $\Delta\sigma$, die im gesamten Bereich zwischen den beiden Maxima nahezu konstant ist. Bei der Sternkonfiguration hat man die folgenden Werte: $\sigma^{(2)} = 0,49 \text{ mb/MeVsr}^2$ und $\Delta\sigma = 0,030 \text{ mb/MeVsr}^2$; daraus ergibt sich die relative Abweichung $\Delta\sigma_{\text{rel}} = 6,1\%$.

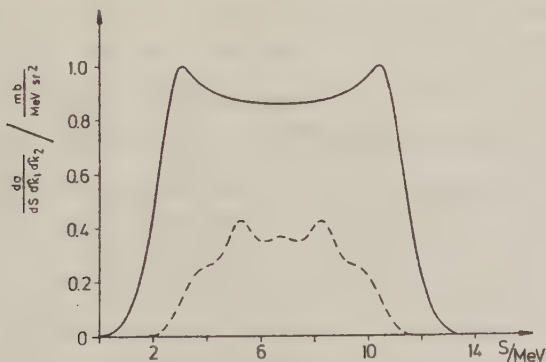


Abbildung 9.21: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 14,4 \text{ MeV}$, $\Theta_1 = \Theta_2 = 51,02^\circ$ und $\Phi_{\text{rel}} = 120^\circ$ (Kurven wie in Abbildung 9.1)

Die Abbildung 9.21 zeigt den senkrechten Stern, der durch $\beta=90^\circ$ festgelegt ist. Die Sternkonfiguration liegt bei $S=6,76$ MeV; dort hat man die Werte $\sigma^{(a)}=0,86\text{mb/MeVsr}^2$, $\Delta\sigma=0,035\text{mb/MeVsr}^2$ und also $\Delta\sigma_{\text{rel}}=4,3\%$. Auch hier treten die schon mehrfach beobachteten Oszillationen in $\Delta\sigma$ auf. Auffällig ist, daß in der Umgebung der Sternkonfiguration auf der kinematischen Kurve sowohl im Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(a)}$ als auch in der Abweichung $\Delta\sigma$ wo von den Oszillationen abgesehen werden soll, nur wenig Struktur vorhanden ist. Das liegt daran, daß die Impulse $\vec{q}_i$ und $\vec{p}_i$ für $i=1,2,3$ im Bereich zwischen den beiden Maxima sich nur wenig ändern; dasselbe gilt dann auch für den Phasenraumfaktor $\rho_3(s, \hat{k}_1, \hat{k}_2)$ und das Absolutquadrat $|M|^2$: Dies ist die Bestätigung der schon oben getroffenen Aussage, daß der Phasenraum in der Umgebung der Sternkonfiguration sehr "eben" ist, und daß QFS- und FSI-Konfigurationen sehr weit entfernt sind. Dies ist ein großer Vorteil für das Experiment. Wegen dieser schwachen Veränderlichkeit führen Unschärfe der Einschußenergie E_{lab} und endliche Öffnungswinkel der Detektoren nur zu kleinen Variationen im Wirkungsquerschnitt; der experimentelle Fehler läßt sich somit in dieser Hinsicht relativ klein halten. Kleine Fehlerbalken sind ja deshalb notwendig, weil die relative Abweichung mit $\Delta\sigma_{\text{rel}}=4,3\%$ etwa an der derzeitigen Nachweisgrenze liegt. Ein weiterer Grund für die Messung des Wirkungsquerschnittes zum senkrechten Stern ist der Hinweis von Kloet et al. [Klo 73]: Sie behaupten, daß für diese Konfiguration die aus Faddeev-Gleichungen berechneten Wirkungsquerschnitte im Vergleich zu anderen Konfigurationen weniger von dem benutzten Zweinukleonenpotential abhängen. Dies ist ein Vorteil für den theoretischen Teil der Experimentauswertung.

Wie schon gesagt wurde, ist der senkrechte Stern die Konfiguration, die im Phasenraum am weitesten von den durch Zwei-Nukleonen-Effekten beherrschten Konfigurationen entfernt ist. Somit sollte auch der Effekt des Dreinukleonenpotentials nicht von Zwei-Nukleonen-Effekten überdeckt sein: Im senkrechten Stern läßt sich das Dreinukleonenpotential in reinster Form studieren. Überraschend ist jedoch, daß die Abweichung auch für den senkrechten Stern positiv ist; da diese Endkanalkonfiguration mit der Dreieckskonstellation zur Reaktionszeit, wo also das Dreinukleonenpotential attraktiv wirkt, in Verbindung gebracht werden kann, würde man genau das Gegenteil erwarten, weil nämlich für die kollineare Konfiguration, wo bei der Reaktion die Repulsion auf Grund der kollinearen Nukleonenanordnung wirksam wird, genau dasselbe Vorzeichen bei $\Delta\sigma$ auftritt. Daß in beiden Fällen das Vorzeichen von $\Delta\sigma$ dasselbe ist, also sowohl für Kollinearität als auch für die Sternkonfiguration der Wirkungsquerschnitt vom Dreinukleonenpotential vergrößert wird, zeigt, in welcher komplizierter Weise die verschiedenen Amplituden, die in $|M|^2$ eingehen, miteinander interferieren.

Bei anderen Einschußenergien E_{lab} sind die Ergebnisse sehr ähnlich; generell gilt, daß mit wachsendem E_{lab} die Wirkungsquerschnitte $\sigma^{(1)}$ kleiner, aber die relativen Abweichungen $\Delta\sigma_{rel}$ größer werden. Bei den durch Experimente erfaßbaren Sternkonfigurationen, die koplanar oder nur wenig gegen den Strahl geneigt sind, werden Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(2)}$ und Abweichung $\Delta\sigma$ durch FSI und QFS bestimmt. Bei stark geneigten oder sogar senkrechten Sternen zeigt sich der nahezu konstante Verlauf von $\sigma^{(2)}$ und $\Delta\sigma$ in der Umgebung der Sternkonfiguration. Als Beispiele mögen die Abbildungen 9.22

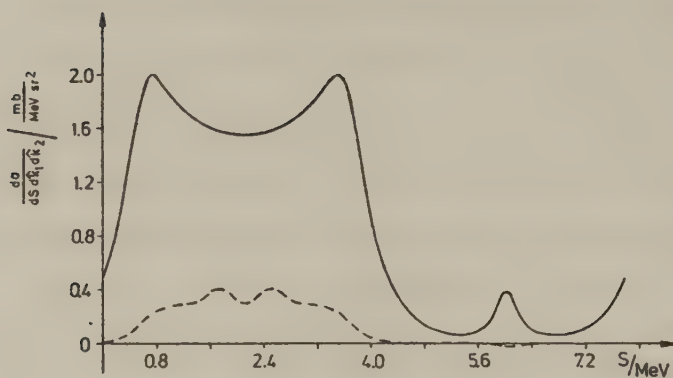


Abbildung 9.22: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 7,5 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 46,25^\circ$ und $\varphi_{12} = 120^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

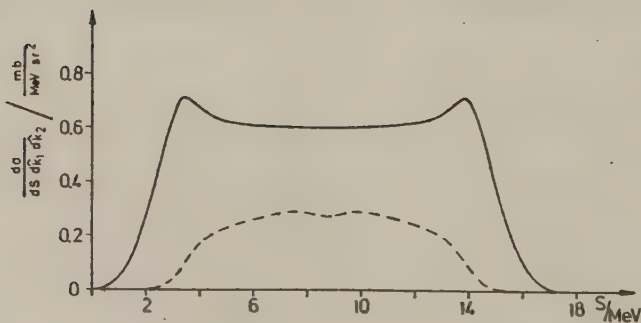


Abbildung 9.23: Wirkungsquerschnitte für $E_{\text{lab}} = 18,5 \text{ MeV}$, $\theta_1 = \theta_2 = 51,94^\circ$ und $\varphi_{12} = 120^\circ$ (Kurven wie in Abb. 9.1)

und 9.23 dienen, wo für $E_{\text{lab}}=7,5\text{MeV}$ und $E_{\text{lab}}=18,5\text{MeV}$ $\sigma^{(2)}$ und $\Delta\sigma$ zu kinematischen Kurven mit senkrechten Sternen dargestellt sind. Wie bei $E_{\text{lab}}=14,4\text{MeV}$ liegen die Sternkonfigurationen genau in der Mitte zwischen den beiden schwachen Maxima.

Man kann also sagen, daß die Sternkonfigurationen, die durch FSI oder QFS beeinflußt werden (dazu gehört ein Teil der koplanaren Sterne), das von diesen Zwei-Teilchen-Effekten bekannte Verhalten zeigen: Für die Abweichungen $\Delta\sigma$ sind, abhängig von Laborenergie und Laborwinkel, sowohl positive als auch negative Werte möglich. Bei den senkrechten und nahezu senkrechten Sternen verstärkt das Dreinukleonenpotential den Wirkungsquerschnitt.

10. Zusammenfassung

Die im letzten Kapitel vorgestellten Ergebnisse für die Neutron-Deuteron-Aufbruchreaktion zeigen, daß im Rahmen des in dieser Arbeit benutzten Modelles das Spin-Isospin-gemittelte 2π -Austausch-Dreinkleonenpotential, das zusätzlich zu dem UPA-Malfliet-Tjon-Potential im Drei-Nukleonen-System wirkt, die Form des Aufbruchwirkungsquerschnittes in vielfältiger Weise modifiziert. Die Effekte dieses Dreinkleonenpotentials sind höchstens von der Größenordnung der Fehlerbalken der derzeitigen experimentellen Werte: Diese Effekte können bei Wirkungsquerschnitten von etwa 5 mb/MeVsr^2 bis zu 5 % betragen, bei kleineren jedoch auf 10% ansteigen. Bei kleinen Neutronen-Einschußenergien (bis etwa $E_{\text{lab}} = 8 \text{ MeV}$) wird der Wirkungsquerschnitt für fast alle Konfigurationen vergrößert, bei größeren Energien ist, abhängig von den Laborwinkeln, die die kinematischen Kurven festlegen, sowohl Verstärkung wie auch Abschwächung möglich. Das Dreinkleonenpotential erzeugt aber keine neuen Peaks, weil dafür die Änderungen im Wirkungsquerschnitt zu klein sind. Die Form des Wirkungsquerschnittes längs der kinematischen Kurve wird also qualitativ nicht verändert: Die Höhe der Peaks kann vergrößert (siehe die Abbildungen 9.3, 9.8 oder 9.14) oder verkleinert werden (siehe die Abbildungen 9.1, 9.7 oder 9.11), oder es wird der Wirkungsquerschnitt auf einem großen Teil der kinematischen Kurve angehoben (siehe die Abbildungen 9.16 oder 9.21). Es ändern sich also die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte, die zu verschiedenen Konfigurationen gehören. Solche Quotienten von Wirkungsquerschnitten lassen sich experimentell mit größerer Genauigkeit als Absolutwerte angeben. Dabei sind solche Paare von Peaks von Vorteil, bei denen die durch das Dreinkleonenpotential bewirkten Abweichungen verschiedene Vorzeichen haben: Zum Beispiel sind

für $E_{\text{lab}}=14,4$ MeV und $\varphi_{12}=180^\circ$ die 1-2-FSI-Peaks zu $\theta_1=\theta_2=48,14^\circ$ und $\theta_1=\theta_2=15,22^\circ$ geeignet (Abbildungen 9.3 und 9.1), oder es kann der letztere durch den QFS-Peak zu $\theta_1=\theta_2=39,60^\circ$ ersetzt werden (Abbildung 9.11). Interessant ist auch das Verhalten des Dreinukleonenpotentials im Wirkungsquerschnitt zwischen dem 2-3-FSI-Peak und dem 1-3-FSI-Peak für die symmetrischen Winkelstellungen mit $\theta_1=\theta_2$: Bei $\theta_1=\theta_2=\theta_{\text{FSI}}^{\text{sym}}$ hat man für $E_{\text{lab}}=14,4$ MeV eine Abschwächung von $-4,3\%$ (Abbildung 9.3) und bei $\theta_1=\theta_2=\theta_{\text{FSI}}^{\text{sym}}$ beträgt die Verstärkung für die kollineare Konfiguration $9,3\%$; allerdings sind in beiden Fällen die Wirkungsquerschnitte mit etwa $0,45$ mb/MeV sr^2 relativ klein. Eine Absolutmessung des Wirkungsquerschnittes zum Nachweis des Dreinukleonenpotentials ist sicherlich für die Konfiguration mit dem senkrechten Stern sinnvoll (siehe die Abbildungen 9.21 bis 9.23), weil dabei auf Grund des Fehlens von Zwei-Nukleonen-Effekten (FSI und QFS) der Wirkungsquerschnitt in der zugehörigen Phasenraumumgebung, wie es oben schon angedeutet worden ist, sich nur geringfügig verändert, was die Simulationsrechnungen, die für die Experimentauswertung notwendig sind, leichter macht. Der aus der Messung folgende Wirkungsquerschnitt ist somit genauer bestimmt als ein anderer von der gleichen Größenordnung, der zu einer Konfiguration gehört, die in der Nähe von FSI oder QFS liegt. Wichtig sind die Ergebnisse für die n-n-FSI-Peaks. Wenn man aus diesen Wirkungsquerschnitten die Singulett-n-n-Steuflänge a_{nn} bestimmen will, ist es, wie die Tabellen 9.5 und 9.6 zeigen, erforderlich die für die Anpassung notwendigen Faddeev-Rechnungen mit Dreinukleonenpotential durchzuführen, weil so die Richtungs- und Energieabhängigkeit richtig beschrieben wird. Ungeklärt ist aber noch immer die Diskrepanz bei den verschiedenen Messungen für a_{nn} .

Außer verfeinerten Messverfahren für die n-d-Aufbruchreaktionen sind aber auch bessere theoretische Vergleichsrechnungen notwendig, um gesicherte Aussagen über die Wichtigkeit von Dreinukleonenpotentialen in derartigen Reaktionen machen zu können. Die Diskussion in Kapitel 8 zeigte, daß unrealistische Potentiale wie das rein attraktive Yamaguchi-Potential zusammen mit dem Dreinukleonenpotential zu völlig falschen Ergebnissen führt. Zwar hat man mit dem auch repulsiven UPA-MT-Potential diese Schwächen behoben, doch kann nicht abgeschätzt werden, wie realistisch solche Rechnungen bei höheren Einschußenergien sind. Es wird daher notwendig sein, das volle spin- und isospinabhängige Dreinukleonenpotential (4.2) zusammen mit dem Reid- oder Bonner Potential zu verwenden.

Dabei müßte untersucht werden, ob ein anderes Vorgehen beim Einbau des Dreinukleonenpotentials zweckmäßiger sein könnte. Die Diskussion in Kapitel 4 und 5 hat gezeigt, daß sich auf Grund der Partialwellenentwicklung des Dreinukleonenpotentials einige numerische Probleme ergeben:

- a) Bei Integrationen können Pole, die außerhalb des Integrationsbereiches liegen, zu großen Variationen führen (Gleichung (4.41)).
- b) In der Summe für die Partialwellenanteile des Dreinukleonenpotentials gibt es speziell für höhere Drehimpulse Terme, die sich gegenseitig aufheben.
- c) Das Schwellenverhalten von $\mathcal{U}_{\text{DNL}}(p', q', p, q)$, das durch Gleichung (4.80) gegeben ist, führt bei den Interpolationen, die für die Berechnung von $\mathcal{C}_{\text{DNL}}(p', q', p, q)$ und $\mathcal{D}_{\text{DNL}}(p', q', p, q)$ notwendig sind (siehe (5.87) und (5.88)), zu numerischen Schwierigkeiten.

Da man die Matrixelemente der Operatoren C und D bezüglich der Basiszustände $|\vec{p} \vec{q} \sigma\rangle$ (vergleiche (5.83) und (5.84)) analytisch angeben kann, indem man die Darstellung (A.22) der Permutationsopera-

toren ausnutzt, kann man C_{KERNAL} und D_{KERNAL} direkt durch Integrale der Form (4.37) gewinnen. Das setzt voraus, das man in der Lage ist, das Achtfach-Integral über die Kugelfunktionen numerisch zu berechnen. Als Integrationsverfahren bietet sich dafür die "Quasi-random-number"-Methode an [Tan 74]; aber auch hierbei ist ungewiß, ob sich nicht neue numerische Probleme ergeben.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Untersuchungen in dieser Arbeit zu interessanten Modifikationen des Aufbruchwirkungsquerschnittes auf Grund des Zusammenspiels von Zwei- und Dreinukleonenpotentialen geführt haben. Es sind Hinweise gegeben worden, bei welchen Prozessen der Experimentator Effekte des Dreinukleonenpotentials am leichtesten finden kann. Da dieses Potential fundamental für die Kernphysik ist, sind solche Untersuchungen sehr wichtig. Daher ist für die Zukunft zu wünschen, daß es einerseits den Experimentatoren gelingt, mit verfeinerten Meßmethoden die Wirkungsquerschnitte genauer zu bestimmen, und daß es andererseits die Theoretiker lernen, das Dreinukleonenpotential besser zu handhaben, um so möglichst realistische Rechnungen durchführen zu können.

Anhang A · Partialwellenentwicklung der zyklischen Permutationen

Die Summe der beiden zyklischen Permutationen, $P = P_{231} + P_{312}$ tritt infolge der Antisymmetrisierung auf. Da die Zustände $|p q \alpha\rangle = |p q \ell \lambda L M s S M_s t T M_T\rangle$ die geeigneten Basiszustände sind, müssen die Matrixelemente von P bezüglich dieser Basis berechnet werden. Zuerst soll nur der Raumanteil $P_r = P_{231}^{(r)} + P_{312}^{(r)}$ betrachtet werden, später werden Spin und Isospin einbezogen. Auf einen Drei-Teilchen-Zustand $|\Psi\rangle$ wirkt P_r so:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \vec{q} | P_r | \Psi \rangle &= \langle \vec{p}_2 \vec{q}_2 | \Psi \rangle + \langle \vec{p}_3 \vec{q}_3 | \Psi \rangle \\ &= \langle \vec{p}_2 - \frac{1}{2} \vec{p} - \frac{3}{4} \vec{q}, \vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q} | \Psi \rangle + \langle \vec{p}_3 - \frac{1}{2} \vec{p} + \frac{3}{4} \vec{q}, -\vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q} | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (A.1)$$

Mit der Partialwellenzerlegung

$$\langle \vec{p} \vec{q} | \Psi \rangle = \sum_{\ell \lambda L M} \langle p q \ell \lambda L M | \Psi \rangle \langle \vec{p} \vec{q} | \ell \lambda L M \rangle = \sum_{\ell \lambda L M} \psi_{\ell \lambda L}(p q) Y_{\ell \lambda L M}(\hat{p} \hat{q}) \quad (A.2)$$

ergibt sich für den ersten Summanden von (A.1):

$$\langle \vec{p}_2 - \frac{1}{2} \vec{p} - \frac{3}{4} \vec{q}, \vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q} | \Psi \rangle = \sum_{\ell \lambda L M} \psi_{\ell \lambda L}(p_0, q_0) Y_{\ell \lambda L M}(\widehat{-\frac{1}{2} \vec{p} - \frac{3}{4} \vec{q}}, \widehat{\vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q}}) \quad (A.3)$$

wobei

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{4} p^2 + \frac{9}{16} q^2 + \frac{3}{4} p q x} \quad (A.4)$$

$$q_0 = \sqrt{p^2 + \frac{1}{4} q^2 - p q x} \quad (A.5)$$

und

$$x = \hat{p} \cdot \hat{q} \quad (A.6)$$

ist. Es gilt die Energieerhaltung:

$$p^2 + \frac{3}{4} q^2 = p_b^2 + \frac{3}{4} q_b^2 \quad (\text{A.7})$$

Die Kugelfunktionen in (A.3) müssen so umgeformt werden, daß als Argumente die Richtungen $\hat{p}$ und $\hat{q}$ auftreten. Aus der Beziehung

$$Y_{lm}(\alpha_1 \hat{r}_1 + \alpha_2 \hat{r}_2) = \frac{1}{|\alpha_1 \hat{r}_1 + \alpha_2 \hat{r}_2|^l} \sum_{l_1+l_2=l} F_{l_1 l_2}(\alpha_1 r_1, \alpha_2 r_2) Y_{l_1 l_2 l m}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) \quad (\text{A.8})$$

mit

$$F_{l_1 l_2}(z_1, z_2) = z_1^{l_1} z_2^{l_2} \sqrt{\frac{4\pi (2l_1+2l_2+1)!}{(2l_1+1)! (2l_2+1)!}} \quad (\text{A.9})$$

ergibt sich für die gekoppelten Kugelfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{\lambda LM}(-\frac{1}{2}\hat{p} - \frac{3}{4}\hat{q}, \hat{p} - \frac{1}{2}\hat{q}) &= \frac{1}{p_b^l q_b^\lambda} \sum_{l_1+l_2=l} F_{l_1 l_2}(-\frac{1}{2}p, -\frac{3}{4}q) F_{2l_2}(\hat{p}, \frac{1}{2}\hat{q}) \\ &\quad \cdot [Y_{l_1 l_1 l}(\hat{p}, \hat{q}) Y_{l_2 l_2 \lambda}(\hat{p}, \hat{q})]_{LM} \\ &= \frac{1}{p_b^l q_b^\lambda} \sum_{\substack{l_1+l_2=l \\ l_2+\lambda_2=\lambda}} (-\frac{1}{2}p)^{l_1} (-\frac{3}{4}q)^{\lambda_1} p^{l_2} (-\frac{1}{2}q)^{l_2} (2l_1+1) (2\lambda+1) \sqrt{\frac{(2l)!}{(2l_1)! (2l_2)!}} \\ &\quad \cdot \sum_{l'' \lambda''} \langle l_1 0 l_2 0 | l'' 0 \rangle \langle \lambda_1 0 \lambda_2 0 | \lambda'' 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} l_1 \lambda_1 l \\ l_2 \lambda_2 \lambda \\ l'' \lambda'' L \end{matrix} \right\} Y_{l'' \lambda'' L M}(\hat{p}, \hat{q}). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die x-Abhängigkeit, die in p_b und q_b steckt, wird durch Entwicklung nach Legendre-Polynomen absepariert:

$$\frac{Y_{\lambda L L}(p_b, q_b)}{p_b^l q_b^\lambda} = \sum_{\lambda} (2\lambda+1) g_{\lambda L L}(p, q) P_{\lambda}(x) \quad (\text{A.11})$$

mit

$$g_{\lambda L L}(p, q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{Y_{\lambda L L}(p_m, q_b)}{p_b^l q_b^\lambda} P_{\lambda}(x) dx.$$

Die durch Umformung von $P_{\lambda}(x)$ sich ergebene Kugelfunktion,

$$P_{\lambda}(\hat{p} \cdot \hat{q}) = \frac{4\pi}{\sqrt{2\lambda+1}} (-1)^{\lambda} Y_{\lambda 0 0}(\hat{p}, \hat{q}), \quad (\text{A.12})$$

wird mit $Y_{\ell' \lambda' L M}(\hat{p}, \hat{q})$ in (A.10) zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} Y_{\ell' \lambda' L M}(\hat{p}, \hat{q}) Y_{\lambda 0 0}(\hat{p}, \hat{q}) &= [Y_{\ell' \lambda' L}(\hat{p}, \hat{q}) Y_{\lambda 0}(\hat{p}, \hat{q})]_{LM} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell' \lambda'} \frac{\sqrt{(2\ell'+1)(2\lambda'+1)(2\ell'+1)(2\lambda'+1)}}{\sqrt{2\lambda+1}} (-1)^{\lambda'+\lambda'+L+\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \\ &\quad \cdot \langle \ell' 0 \ell'' 0 | \lambda 0 \rangle \langle \lambda' 0 \lambda'' 0 | \lambda 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} \ell' \lambda' L \\ \lambda'' \ell'' \lambda \end{matrix} \right\} Y_{\ell' \lambda' L M}(\hat{p}, \hat{q}). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Alles in (A.3) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} \langle -\frac{1}{2} \vec{p} - \frac{3}{4} \vec{q}, \vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q} | \psi \rangle &= \\ &= \sum_{\ell \lambda \ell' \lambda' L M} (-1)^{\ell} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_{\ell' \lambda' L}(\rho, q, x)}{\rho^{\ell} q^{\frac{1}{2}}} \psi_{\ell \lambda L}(\rho, q, x) dx Y_{\ell' \lambda' L M}(\hat{p}, \hat{q}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

mit

$$P_{\ell' \lambda' L}(\rho, q, x) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(x) \sum_{\substack{\ell_1 + \ell_2 = \ell \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda}} \rho^{\ell_1 + \ell_2} q^{\lambda_1 + \lambda_2} A_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}^{ \ell_1 \lambda_1 \ell_2 \lambda_2 \lambda } \quad (\text{A.15})$$

und

$$\begin{aligned} A_{\ell' \lambda' \ell \lambda L}^{ \ell_1 \lambda_1 \ell_2 \lambda_2 \lambda } &= (-1)^{L+\lambda} (2\ell+1)(2\lambda+1) \sqrt{(2\ell'+1)(2\lambda'+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell_1} \left(\frac{3}{4}\right)^{\lambda_1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda_2} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{(2\ell')}{(2\ell_1)} \frac{(2\lambda')}{(2\lambda_1)}} \cdot \sum_{\ell'' \lambda''} \sqrt{(2\ell'+1)(2\lambda'+1)} \langle \ell' 0 \ell_2 0 | \ell'' 0 \rangle \langle \ell' 0 \ell'' 0 | \lambda 0 \rangle \\ &\quad \cdot \langle \lambda_1 0 \lambda_2 0 | \lambda'' 0 \rangle \langle \lambda' 0 \lambda'' 0 | \lambda 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} \ell' \lambda' L \\ \lambda'' \ell'' \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell_1 \lambda_1 \ell \\ \ell_2 \lambda_2 \lambda \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Für den zweiten Summanden in (A.3) erhält man einen Ausdruck, der sich von der rechten Seite von (A.14) nur dadurch unterscheidet, daß statt $(-1)^{\ell}$ die Phase $(-1)^{\ell'}$ steht. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{p}' \hat{q}' | P | \Psi \rangle &= \sum_{\substack{\lambda' \lambda' \lambda' \\ \lambda \lambda \lambda}} \int_0^\infty \langle \hat{p}' \hat{q}' \lambda' \lambda' \lambda' | P | p q \lambda \lambda \lambda \rangle \psi_{\lambda \lambda} (p, q) p^2 q^2 dp dq \\
 &\quad \cdot \gamma_{\lambda' \lambda' \lambda'} (\hat{p}', \hat{q}') \\
 &= \sum_{\lambda' \lambda' \lambda} \frac{1}{2} [(-1)^{\lambda'} + (-1)^{\lambda}] \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda' \lambda' \lambda} (p' q' x)}{p^{\lambda'} q^{\lambda}} \psi_{\lambda \lambda} (p, q) dx \gamma_{\lambda' \lambda' \lambda} (\hat{p}', \hat{q}').
 \end{aligned}
 \tag{A.17}$$

Daraus ergibt sich das Endergebnis:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{p}' \hat{q}' \lambda' \lambda' \lambda' | P_\gamma | p q \lambda \lambda \lambda \rangle &= \\
 &= \delta_{\lambda \lambda} \delta_{\lambda' \lambda'} \cdot \frac{1}{2} [(-1)^{\lambda'} + (-1)^{\lambda}] \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda' \lambda' \lambda} (p' q' x)}{p^{\lambda'} q^{\lambda+2}} \delta(p-p_0) \delta(q-q_0) dx.
 \end{aligned}
 \tag{A.18}$$

Die Matricelemente von P_γ sind also Distributionen, die nur in Integralen auftreten können: Die Form von (A.18) darf nur in Integralen über p und q angewandt werden. Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten, die in (A.16) vorkommen, sorgen dafür, daß

$$A_{\lambda' \lambda' \lambda' \lambda' \lambda}^{\lambda' \lambda' \lambda' \lambda' \lambda} \text{ verschwindet, wenn } (-1)^{\lambda' + \lambda'} \neq (-1)^{\lambda + \lambda} \text{ ist.}$$

Damit erhält also die Summe P der zyklischen Permutationen die Gesamtparität. Wegen des Vorfaktors $[(-1)^{\lambda'} + (-1)^{\lambda}]$ erhält der Ortsanteil P_γ sogar die Parität im Subsystem und die des dritten Teilchens: $(-1)^{\lambda'} = (-1)^{\lambda}$ und $(-1)^{\lambda'} = (-1)^{\lambda}$.

Wichtig für die numerische Berechnung von $P_{\lambda' \lambda' \lambda} (p, q, x)$ ist, daß die Summen über λ'', λ'' und λ , die in (A.15) und (A.16) zu bilden sind, wegen der Geometriekoeffizienten in (A.16) nur über eine endliche Anzahl von Drehimpulsen laufen; für die Berechnung von $P_{\lambda' \lambda' \lambda} (p, q, x)$ ist also keine numerische Näherung notwendig.

Nun müssen noch Spin- und Isospinanteil von P berücksichtigt werden. Für die Umkopplung der Spinzustände ergibt sich:

ergibt (es sei $|st\rangle = |sSM_s tTM_T\rangle$), treten die folgenden Matrixelemente auf (vergl. (4.13) und (4.14)):

$$S_1(\vec{Q}, \vec{Q}') = \langle \vec{S}_a | A_1^\sigma A_1^\tau | \vec{S}_a \rangle \quad (\text{B.2})$$

und

$$S_2(\vec{Q}, \vec{Q}') = \langle \vec{S}_a | A_2^\sigma A_2^\tau | \vec{S}_a \rangle \quad (\text{B.3})$$

mit

$$A_1^\sigma = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{Q} \quad \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{Q}', \quad (\text{B.4})$$

$$A_1^\tau = \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_1, \quad (\text{B.5})$$

$$A_2^\sigma = \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{Q} \quad \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{Q}' \quad \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{Q} \times \vec{Q}') \quad (\text{B.6})$$

und

$$A_2^\tau = (\vec{\tau}_3 \times \vec{\tau}_2) \cdot \vec{\tau}_1, \quad (\text{B.7})$$

Die Skalar- und Vektorprodukte in diesen Ausdrücken können in Tensorprodukte umgeschrieben werden:

$$\vec{X}_1 \cdot \vec{X}_2 = -\sqrt{3} [X_1 X_2]_{00}, \quad (\text{B.8})$$

$$(\vec{X}_1 \times \vec{X}_2)_m = -\sqrt{2} i [X_1 X_2]_{1m}. \quad (\text{B.9})$$

Dabei seien X_1 und X_2 die zu $\vec{X}_1$ und $\vec{X}_2$ gehörenden Vektoren in sphärischer Basis; X_1 und X_2 sind somit irreduzible Tensoroperatoren der Stufe 1. Mit $(\vec{X}_1 \times \vec{X}_2)_m$ sei die sphärische Komponente des Vektorproduktes bezeichnet. Die Spinmatrixelemente, die sich ergeben, nachdem die Impulsüberträge abgekoppelt worden sind, und die Isospinmatrixelemente können mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorem berechnet werden, das in der Form

$$\langle \ell'' m'' | X_{\ell m} | \ell' m' \rangle = \langle \ell m \ell' m' | \ell'' m'' \rangle \langle \ell'' || X_\ell || \ell' \rangle \quad (\text{B.10})$$

$$\langle s' S' M'_s | s S M_s \rangle_1 = \delta_{s's} \delta_{M'_s M_s} (-1)^{s'} \Lambda_{s's}^S \quad (\text{A.19})$$

und

$$\langle s' S' M'_s | s S M_s \rangle_3 = \delta_{s's} \delta_{M'_s M_s} (-1)^s \Lambda_{s's}^S \quad (\text{A.20})$$

mit

$$\Lambda_{s's}^S = \sqrt{(2s'+1)(2s+1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s \\ \frac{1}{2} & s & s' \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Diese Werte von Λ_{ss}^S sind in Tabelle 2.1 angegeben. Analog wird Λ_{tt}^T für den Isospin definiert. Mit $|p\rangle = |s S M_s t T M_T\rangle$ folgt also die dem Ausdruck (A.1) entsprechende Relation für den vollen Operator P:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' \vec{q}' p' | P | \vec{p} \vec{q} p \rangle &= \delta_{s's} \delta_{M'_s M_s} \delta_{T'T} \delta_{M'_T M_T} \Lambda_{s's}^S \Lambda_{t't}^T \\ &\cdot \left[(-1)^{s'+t'} \langle \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 | \vec{p} \vec{q} \rangle_1 + (-1)^{s+t} \langle \vec{p}'_3 \vec{q}'_3 | \vec{p} \vec{q} \rangle_3 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Für die Partialwellen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle p' q' \alpha' | P | p q \alpha \rangle_1 &= \delta_{L'L} \delta_{M'_L M_L} \delta_{s's} \delta_{M'_s M_s} \delta_{T'T} \delta_{M'_T M_T} \\ &\cdot \frac{1}{2} \left[(-1)^{l'+s'+t'} + (-1)^{l+s+t} \right] \Lambda_{s's}^S \Lambda_{t't}^T \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda}(\cos \theta) \Lambda_{\lambda}^T(p' q' x)}{p^{l+2} q^{l+2}} \delta(p-p_0) \delta(q-q_0) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Anhang B · Berechnung von Spin - Isospin-Matrixelementen des gemittelten Dreinukleonenpotentials

Bei der Berechnung des Dreinukleonenpotentials, das sich durch Mittelung mit den total-antisymmetrischen Spin-Isospin-Zustand (vergl. (4.8))

$$|\Xi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle) \quad (\text{B.1})$$

benutzt werden soll. Die auftretenden reduzierten Matrixelemente gekoppelter Tensoroperatoren können mit

$$\begin{aligned} \langle (l_1'' l_2'') L'' \| [A_{l_1} B_{l_2}]_L \| (l_1' l_2') L' \rangle &= \sqrt{(2l_1''+1)(2l_2''+1)(2L+1)(2L'+1)} \\ &\cdot \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & L \\ l_1' & l_2' & L' \\ l_1'' & l_2'' & L'' \end{matrix} \right\} \langle l_1'' \| A_{l_1} \| l_1' \rangle \langle l_2'' \| B_{l_2} \| l_2' \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

auf einfache reduzierte Matrixelemente zurückgeführt werden.

Ich beginne mit den Isospin-Matrixelementen in $S_1(\vec{Q}, \vec{Q}')$:

$$\begin{aligned} \langle (t' \frac{1}{2}) T_{M_T} | A_1^T | (t \frac{1}{2}) T_{M_T} \rangle &= -\sqrt{3} \langle 00 T_{M_T} | T_{M_T} \rangle \langle (t' \frac{1}{2}) T \| [[\tau_z \tau_z]_0 1]_{00} \| (t \frac{1}{2}) T \rangle \\ &= \begin{cases} -3 & , t' = t = 0 \\ 1 & , t' = t = 1 \\ 0 & , t \neq t' \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Dabei wurde $\langle \frac{1}{2} \| \tau_z \| \frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{3}$ benutzt. Für das zweite Isospin-Matrixelement ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle (t' \frac{1}{2}) T_{M_T} | A_2^T | (t \frac{1}{2}) T_{M_T} \rangle &= -i\sqrt{6} \langle 00 T_{M_T} | T_{M_T} \rangle \langle (t' \frac{1}{2}) T \| [[\tau_z \tau_z]_2 \tau_z]_0 \| (t \frac{1}{2}) T \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & , t = t' \\ i \cdot 2\sqrt{3} & , t' = 0, t = 1 \\ -i \cdot 2\sqrt{3} & , t' = 1, t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Spin und Impulsüberträge werden durch die folgenden Beziehungen entkoppelt:

$$\begin{aligned} A_1^\sigma &= 3 [[\sigma_2 Q]_0 [\sigma_3 Q']_0]_{00} \\ &= \sum_{k m_k} (-1)^{k-m_k} [\sigma_2 \sigma_3]_{k m_k} [Q Q']_{k, -m_k} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} A_2^\sigma &= 3i\sqrt{6} [[[\sigma_2 Q]_0 [\sigma_3 Q']_0]_0 [\sigma_1 [Q Q']_2]_0]_{00} \\ &= i\sqrt{2} \sum_{j k} \sum_{m_j m_k} (-1)^{j-m_j} [[\sigma_2 \sigma_3]_k \sigma_1]_{j m_j} [[Q Q']_k [Q Q']_2]_{j, -m_j} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Es treten also die Spinmatrixelemente in der Form auf:

$$\begin{aligned} \langle (s' \frac{1}{2}) S M_s | [\sigma_2 \sigma_3]_{k m} | (s \frac{1}{2}) S M_s \rangle &= 6 \cdot \langle k m S M_s | S' M_s' \rangle \\ &\cdot \sqrt{(2s-1)(2s'+1)(2k+1)(2S+1)} \begin{Bmatrix} s' & s & \frac{1}{2} \\ s & s & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

und

$$\begin{aligned} \langle (s' \frac{1}{2}) S M_s | [[\sigma_2 \sigma_3]_k \sigma_1]_{j m_j} | (s \frac{1}{2}) S M_s \rangle &= -6\sqrt{6} \langle j m_j S M_s | S M_s \rangle \\ &\cdot \sqrt{(2s+1)(2s'+1)(2k+1)(2j+1)(2S+1)} \begin{Bmatrix} k & 1 & j \\ s & \frac{1}{2} & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Für $S_1(\vec{Q}, \vec{Q}')$ folgt also:

$$\begin{aligned} S_1(\vec{Q}, \vec{Q}') &= \frac{1}{2} \left[-3 \cdot \langle (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | A_1^\sigma | (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle + \langle (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | A_1^\sigma | (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle \right] \\ &= \sum_{k m_k} (-1)^{k-m_k} [Q Q']_{k m_k} \cdot \left[-\frac{3}{2} \langle (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | [\sigma_2 \sigma_3]_{k m_k} | (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | [\sigma_2 \sigma_3]_{k m_k} | (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Wegen

$$\langle (s \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | [\sigma_2 \sigma_3]_{k m_k} | (s \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle = \begin{cases} \sqrt{3} \delta_{k0} & , s=0 \\ -\frac{4}{\sqrt{3}} \delta_{k0} & , s=1 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

erhält man das Endergebnis

$$S_1(\vec{Q}, \vec{Q}') = [Q Q']_{00} \cdot \left[-\frac{3}{2} \cdot (-\frac{4}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right] = -\vec{Q} \cdot \vec{Q}' \quad (\text{B.20})$$

Bei $S_2(\vec{Q}, \vec{Q}')$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_2(\vec{Q}, \vec{Q}') &= -\frac{i}{2} \cdot 2\sqrt{3} \left[\langle (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | A_2^\sigma | (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle - \langle (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | A_2^\sigma | (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle \right] \\ &= \sqrt{6} \sum_{j k} (-1)^j C_{k j} \left[\langle (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | [[\sigma_2 \sigma_3]_k \sigma_1]_{j 0} | (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle (0 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s | [[\sigma_2 \sigma_3]_k \sigma_1]_{j 0} | (1 \frac{1}{2}) \frac{1}{2} M_s \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

mit

$$C_{kj} = [[QQ']_k [QQ']_j]_{j_0} \quad (B.22)$$

Nach Einsetzen von (B.17) in (B.21) folgt, daß nur $k=1$ beiträgt, und man hat

$$\begin{aligned} S_2(\vec{Q}, \vec{Q}') &= \sqrt{6} \left[(\sqrt{2} \langle 00 \frac{1}{2} M_S | \frac{1}{2} M_S \rangle C_{10} + 2 \langle 10 \frac{1}{2} M_S | \frac{1}{2} M_S \rangle C_{11} \right) \\ &\quad - (-\sqrt{2} \langle 00 \frac{1}{2} M_S | \frac{1}{2} M_S \rangle C_{10} + 2 \langle 10 \frac{1}{2} M_S | \frac{1}{2} M_S \rangle C_{11}) \\ &= 4\sqrt{3} C_{10} \end{aligned} \quad (B.23)$$

Da für C_{10} gilt:

$$\begin{aligned} C_{10} &= [[QQ']_1, [QQ']_1]_{00} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\vec{Q} \times \vec{Q}') \cdot (\vec{Q} \times \vec{Q}') = \frac{1}{2\sqrt{3}} (Q^2 Q'^2 - (\vec{Q} \cdot \vec{Q}')^2), \end{aligned} \quad (B.24)$$

folgt das Endergebnis für $S_2(\vec{Q}, \vec{Q}')$:

$$S_2(\vec{Q}, \vec{Q}') = 2 [Q^2 Q'^2 - (\vec{Q} \cdot \vec{Q}')^2] \quad (B.25)$$

Anhang C · Integral über gekoppelte Kugelfunktionen

In diesem Teil des Anhangs wird der Ausdruck X_{00} , der gemäß (4.45) aus mehreren Kugelfunktionen zusammengegekoppelt ist, so umgeformt werden, daß das Integral (4.46) leicht ausführbar ist. Aus (4.45) folgt sofort:

$$\begin{aligned} X_{00} &= [[Y_{r_1 r_2 l_1}(\hat{p}, \hat{p}') Y_{l_2 l_2 0}(\hat{p}, \hat{p}')]_1, [Y_{s_1 s_2 l_1}(\hat{q}, \hat{q}') Y_{l_3 l_3 0}(\hat{q}, \hat{q}')]_{1,}]_{00} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{\substack{j_1 k_1 \\ j_2 k_2}} (2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1) \sqrt{(2r_1+1)(2r_2+1)(2s_1+1)(2s_2+1)} \\ &\quad \cdot \langle r_1 0 l_2 0 | j_1 0 \rangle \langle r_2 0 l_2 0 | j_2 0 \rangle \langle s_1 0 l_2 0 | k_1 0 \rangle \langle s_2 0 l_2 0 | k_2 0 \rangle \\ &\quad \cdot \left\{ \begin{matrix} r_1 & r_2 & l_1 \\ l_2 & l_2 & 0 \\ j_1 & j_2 & l_1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & l_1 \\ l_3 & l_3 & 0 \\ k_1 & k_2 & l_1 \end{matrix} \right\} [Y_{j_1 j_2 l_1}(\hat{p}, \hat{p}') Y_{k_1 k_2 l_1}(\hat{q}, \hat{q}')]_{00} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Die g_j -Symbole lassen sich so vereinfachen:

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & l_1 \\ l_2 & l_2 & 0 \\ j_1 & j_2 & l_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & l_1 \\ l_3 & l_3 & 0 \\ k_1 & k_2 & l_1 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{\tau_1+j_2+l_2+s_1+k_2+l_3}}{(2l_1+1) \sqrt{(2l_2+1)(2l_3+1)}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & l_1 \\ s_2 & s_1 & l_3 \end{Bmatrix}. \quad (C.2)$$

Für die Kugelfunktionen folgt:

$$\begin{aligned} [Y_{j_1 j_2 l_2}(\hat{p}_1, \hat{p}') Y_{k_1 k_2 l_3}(\hat{q}, \hat{q}')]_{00} &= \sum_{L_1 M_1} \sqrt{(2l_1+1)} (-1)^{j_1+j_2+l_2+l_1} \\ &\cdot \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ k_1 & k_2 & L_1 \end{Bmatrix} \cdot Y_{j_1 k_1 L_1 M_1}^*(\hat{p}, \hat{q}) Y_{j_2 k_2 L_1 M_1}(\hat{p}', \hat{q}'). \end{aligned} \quad (C.3)$$

Damit folgt für die Winkelintegration in (4.45):

$$\begin{aligned} &\int Y_{l' \lambda' L' M'}^*(\hat{p}', \hat{q}') Y_{j_2 k_2 L_1 M_1}(\hat{p}', \hat{q}') Y_{j_1 k_1 L_1 M_1}^*(\hat{p}, \hat{q}) Y_{l \lambda L M}(\hat{p}, \hat{q}) d(\hat{p} \hat{q} \hat{p}' \hat{q}') \\ &= \delta_{L L_1} \delta_{M M_1} \delta_{L' L_1} \delta_{M' M_1} \delta_{l' j_2} \delta_{\lambda' k_2} \delta_{l j_1} \delta_{\lambda k_1}. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Es folgt also das Endergebnis:

$$\begin{aligned} &\int X_{00} \cdot Y_{l' \lambda' L' M'}^*(\hat{p}', \hat{q}') Y_{l \lambda L M}(\hat{p}, \hat{q}) d(\hat{p} \hat{q} \hat{p}' \hat{q}') \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)(2\tau_1+1)(2\tau_2+1)(2s_1+1)(2s_2+1)} \\ &\cdot \langle \tau_1 0 l_2 0 | l 0 \rangle \langle \tau_2 0 l_2 0 | l' 0 \rangle \langle s_1 0 l_3 0 | \lambda 0 \rangle \langle s_2 0 l_3 0 | \lambda' 0 \rangle \\ &\cdot \begin{Bmatrix} l & l' & l_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & l_1 \\ s_2 & s_1 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & l' & l_1 \\ \lambda' & \lambda & L \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Literaturverzeichnis

- Aar 64 R.Aaron, R.D. Amado, Y.Y. Yam, Phys. Rev. 136 (1964) B651
- Alt 67 E.O. Alt, P. Grassberger, W. Sandhas, Nucl. Phys.
B2 (1967) 167
- Bak 70 The Padé-Approximant in Theoretical Physics, ed. by
G.A. Baker jr. and J.L. Gammel, Academic Press, New
York, 1970
- Bak 73 B.L.G. Bakker, Thesis, Amsterdam, 1973
- Bak 75 B.L.G. Bakker, Z. Phys. A272 (1975) 335
- Ben 81 J.J. Benayoun, C. Gignoux, J. Chauvin, Phys. Rev.
C23 (1981) 1854
- Bir 79 J. Birchall et al., Phys. Rev. C20 (1979) 1585
- Böm 83 A. Bömelburg, to be printed in Phys. Rev. C
- Bon 79 D.I. Bonbright et al., Phys. Rev. C20 (1979) 879
- Bra 82 R. Brandenburg, W. Glöckle, Nucl. Phys. A377 (1982) 379
- Bra 74 D.D. Brayshaw, Phys. Rev. Lett. 37 (1974) 382
- Bru 77 J. Bruinsma, R.v. Wageningen, Nucl. Phys. A282 (1977) 1
- Car 81 J. Carlson, V.R. Pandharipande, Nucl. Phys. A371 (1981) 301
- Chr 63 R. Chrisolm, Journal of Math. Phys. 4 (1963) 1506
- Coo 79 S.A. Coon et al., Nucl. Phys. A317 (1979) 242
- Coo 81 S.A. Coon, W. Glöckle, Phys. Rev. C23 (1981) 1790
- Dil 71 W. Dilg, L. Koester, W. Nistler, Phys. Lett. 36B (1971) 201
- Dol 73 P. Doleschall, Nucl. Phys. A201 (1973) 264
- Dol 82 P. Doleschall et al., Nucl. Phys. A380 (1982) 72
- Ebe 72 W. Ebenhöf, Nucl. Phys. A191 (1972) 97
- Fad 61 L.D. Faddeev, JETP 12 (1961) 1014
- Gab 81 B. Gabiond et al., Phys. Lett. 103B (1981) 9
- Glö 82 W. Glöckle, Nucl. Phys. A381 (1982) 343

- Glö 82a W. Glöckle, G. Hasberg, A.R. Neghabian, Z. Phys.
A305 (1982) 217
- Glö 83 W. Glöckle, R. Brandenburg, Phys. Rev. C27 (1983) 83
- Gol 64 M.L. Goldberger, K.M. Watson, Collision Theory,
New York, London, Sidney, 1964
- Har 70 E. Harms, Phys. Rev. C1 (1970) 1667
- Har 72 E. Harms, XIV Latin American School of Physics, Caracas,
1972 (A. Reidel, Amsterdam)
- Haj 81 C.H. Hajduk, P.U. Sauer, Nucl. Phys. A369 (1981) 321
- Het 65 J.H. Hetherington, L.H. Schick, Phys. Rev. 137(1965)B935
- Hol 81 K. Holinde, Phys. Rep. 68 (1981) 121
- Kec 75 J. Kecskeméti, T. Czibók, B. Zeitnitz, Nucl. Phys.
A254 (1975) 110
- Klo 73 W.M. Kloet, J.A. Tjon, Nucl. Phys. A210 (73) 380
- Kow 76 K.L. Kowalski, Nucl. Phys. A264 (76) 173
- Lam 76 J.M. Lambert et al., Phys. Rev. C13 (1976) 43
- Lek 81 P. Lekkas, Diplomarbeit, Bochum, 1981
- Lev 74 J.S. Levinger, "The Two and Three-Body Problem" in Springer
Tracts in Modern Physics 71, Berlin, Heidelberg, New York
1974
- Mal 69 R.A. Malfliet, J.A. Tjon, Nucl. Phys. A127 (1969) 161
- Mei 83 W. Meier, W. Glöckle, to be printed in Phys. Rev. C
- Mül 81 L. Müller, Nucl. Phys. A360 (1981) 331
- Mus 82 Muslim, Y.E. Kim, T. Ueda, Phys. Lett. B115 (1982) 273
- Noy 71 H.P. Noyes, H.M. Lipinski, Phys. Rev. C4(1971) 995
- Oer 67 W.T.H. van Oers, J.D. Seagrave, Phys. Lett. 24B (1967) 562
- Ohl 65 G.G. Ohlsen, Nucl. Inst. Meth. 37 (1965) 240
- Rei 68 R.V. Reid, Ann. Phys. 50 (1968) 411
- Phi 68 A.C. Phillips, Nucl. Phys. A107 (1968) 209

- San 78 W. Sandhas, in Few-Body Nuclear Physics, Lectures presented at the Workshop on Few-Body Problems in Nuclear Physics, Miramare-Trieste, 1978
- Sch 74 E.w. Schmid, H. Ziegelmann, The Quantum Mechanical Three-Body Problem, Vieweg, Braunschweig, Pergamon, New York 1974
- Šla 82 I. Šlaus, Y. Akaishi, H. Tanaka, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 993
- Tan 74 H. Tanaka, H. Nagata, Suppl. Prog. Theor. Phys. 56 (74) 121
- Tor 81 J. Torre, J.J. Benayoun, J. Chauvin, Z. Phys. A300 (81) 31
- Whi 76 J.S. Whiting, M.G. Fuda, Phys. Rev. C14 (1976) 18
- Wir 82 K.B. Wiringa, V.R. Pandharipande, preprint, 1982
- Yam 54 Y. Yamaguchi, Phys. Rev. 95 (1954) 1628

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Glöckle für die Vergabe des Promotionsthemas und für die vielen anregenden Diskussionen bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Den anderen Mitarbeitern des Lehrstuhles II für Theoretische Physik habe ich ebenfalls zu danken.

Frau L. Walter und Frau M. Kächele danke ich für das Tippen der Arbeit, und Herrn B. Strybny danke ich für die Anfertigung der vielen Zeichnungen.



Lebenslauf

Geburt: 26.7.1948 in Eberswalde

Eltern: Hans Meier und Edith Meier, geb. Römer

Schulbildung: 1955-1959 Volksschule in Krefeld
1959-1967 Besuch des mathematisch-naturwissenschaftlichen Fichte-Gymnasiums in Krefeld

Wehrdienst: 1967-1969 in Hannover

Studium: 1969-1976 Studium der Physik mit Nebenfach Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum; Diplomarbeit bei Prof. Dr. W. Glöckle am Lehrstuhl II für Theoretische Physik; Thema: "Clustermodellrechnungen zur elastischen Deuteron-Deuteron-Streuung"
1976 Diplom

Promotion: 1976-1983 bei Prof. Dr. W. Glöckle am Lehrstuhl II für Theoretische Physik der Ruhr-Universität Bochum; Thema: "Berechnung des Neutron-Deuteron-Aufbruchwirkungsquerschnittes unter Einschluß eines Dreinukleonenspotentials"

Anstellungen: 1976-1982 als Wissenschaftliche Hilfskraft und als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Experimentalphysik der Ruhr-Universität Bochum

